超幾何・
合流型超幾何微分方程式

西本敏彦・著

共立出版株式会社

まえがき

超幾何微分方程式および合流型超幾何微分方程式の理論は18世紀から19世紀にかけて後世に名を残した卓越した数学者達オイラー，ルジャンドル，ガウス，ベッセル，クンマー，フックス，ラゲールらによって完成された最も美しい理論の1つである．また，2階線形常微分方程式の範囲内で解が全複素平面上で解析的に表現できる場合の大部分が超幾何・合流型超幾何微分方程式に関連して完成され，それらは特殊関数として現在も数学的理論のみならず応用上からも重要な役割を果たしている．20世紀に入り現代物理学の基礎理論である量子力学が現われた時期，水素原子の波動関数がルジャンドルおよびラゲールの多項式でかき表されたということは感動的なことであったに違いない．

本書では，これらの理論を具体的な計算によりできるだけわかりやすく解説することを目的としている．読者としては微分積分学を修了した大学の学部2年生以上の学生を想定している．したがって，理論を理解する上で必要と思われる一変数複素関数論を第1章において，また複素平面上での特異点をもつ2階線形常微分方程式の基礎理論を第2章において述べた．

第3章から第6章までが本論である．第3章において超幾何微分方程式の解の構成とその解析接続について述べたが，解をメリン–バーネス積分により表現し留数計算を行う方法と，オイラー積分による表現を用いるという2つの方法を紹介した．また，ルジャンドルの微分方程式とその解ルジャンドルの関数についても述べた．第4章では合流型超幾何微分方程式について解の構成とその漸近展開について説明したが，ここではラプラス積分による解の表現を用いた．また，ラゲールの微分方程式とその解ラゲールの関数について述べた．第5章では量子力学の原理に基づき水素原子の波動方程式を解くことにより，水素原子の量子化と波動関数がルジャンドルの多項式およびラゲールの多項式によって記述されることを述べた．第6章においては特殊関数の中でも最も応用が広いベッセル関数について解説した．第7章では第3章から第6章の記述の中でしばしば引用するガンマ関数に関する主な公式をまとめて証明を与えた．また，ガンマ関数に関するスターリングの公式を説明するために，積分で定義された関数の漸近展開を求め

る重要な方法の1つである鞍部点法について触れた．以上が本書の内容の概要である．

最近はコンピューターの発達により，微分方程式は容易に数値計算によって近似解が得られる．しかし，解の解析的表現を求めることも重要な課題であると思われるので，計算過程はできる限り省略せず精しく記述するよう努めた．

本書は筆者が早稲田大学において学部4年生および大学院生のためにつくった講義ノートをもとに，複素関数論入門と水素原子の波動関数の章を加えたものである．主な内容は特異点を高々3個をもつ2階線形常微分方程式の解析的理論という狭く限られた場合を取り扱っているが，本来その豊富な内容はまさに古典とよぶにふさわしいものである．執筆に当り名著，福原満州雄著「常微分方程式論」（岩波全書，1950），および小谷正雄，橋本英典共著「特殊関数」（岩波講座　現代応用数学講座，1958）を参考にさせていただいた．

最近は数学的発展として一般化された超幾何関数や多変数の超幾何・合流型超幾何関数の理論が研究され重要な成果が得られているが，これらの原型として本書が入門の役割を果たすことを願っている．

最後に本書の執筆を薦めて下さった早稲田大学 郡 敏昭教授，および出版まで色々とお世話になった共立出版（株）小山透氏，古川昭政氏ならびに編集部の方々に深く感謝申し上げたい．

1998年10月

西本　敏彦

もくじ

第4章　合流型超幾何微分方程式

第5章　量子力学への応用

第6章　ベッセル関数

第7章　ガンマ関数

第1章　複　素　関　数

この章では，１変数複素関数論の概要を述べる．第２章以降で解説する複素領域における２階線形常微分方程式の理論にとって必要なことがら，たとえば正則関数，複素積分，解析接続そして留数定理などについて説明する．

1.1　複素数

A. ２乗すると－１になる数を i で表し，これを**虚数単位**（imaginary unit）という．実数 x と y に対して $z=x+iy$ の形の数を複素数（complex number）という．x を z の**実部**（real part），y を z の**虚部**（imaginary part）といい，それぞれ $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ で表す．$x=y=0$ のとき $z=0$ である．２つの複素数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ に対し，和と差，積はつぎのように行う．

和と差　$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2) \tag{1.1}$$

積　$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2) \tag{1.2}$$

また，$z=x+iy\neq 0$ ならば，z の逆数 $z^{-1}=1/z$ が存在し

$$z^{-1}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2} \tag{1.3}$$

で与えられる．したがって，２つの複素数 z_1, $z_2(z_2\neq 0)$ の商 z_1/z_2 は

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} \tag{1.4}$$

となる．

２つの複素数 z_1, z_2 が $z_1z_2=0$ をみたすならば，z_1 と z_2 のうち少なくとも１つは０となる．なぜなら，もし $z_1\cdot z_2=0$, $z_1\neq 0$ ならば ${z_1}^{-1}$ が存在し，$0={z_1}^{-1}(z_1z_2)=({z_1}^{-1}z_1)z_2=z_2$ となるからである．

$z=x+iy$ に対して，$x-iy$ を z の**共役複素数**（complex conjugate）といい $\bar{z}$ とかく．つぎの式が成り立つことは容易に確かめられる．

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2} \tag{1.5}$$

$$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\quad (z_2\neq 0) \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i} \tag{1.7}$$

B. 複素数 $z=x+iy$ に座標平面上の点 $(x,\ y)$ を対応させる．このときの座標平面を**複素平面**（complex plane）または**ガウス平面**（Gausian plane）という．座標平面の x 軸を**実軸**（real axis），y 軸を**虚軸**（imaginary axis）という．

複素平面上で z を表す点を P とする．原点 O と P を結ぶ線分 OP の長さを r，OP と正の実軸とのなす角を θ（ラジアン）とすると

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1.8}$$

と表される．この表し方を z の**極形式**（polar form）という．r, θ をそれぞれ z の**絶対値**（absolute value, modulus），**偏角**（argument）といい，$|z|$，$\arg z$ と表す．また，つぎの関係式をみたす．

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \arg z=\theta, \quad x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta \tag{1.9}$$

$z=0$ に対しては偏角は定義できない．したがって，z を極形式で表す場合には $z\neq 0$ であるものとする．また，偏角は 2π の整数倍だけの自由度があるが，たとえば $-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲内に限れば複素平面上の $z\neq 0$ に対し，その偏角は一意的に定まる．これを $\arg z$ の**主値**（principal value）といい，$\mathrm{Arg}\, z$ とかく．すなわち

$$-\pi<\mathrm{Arg}\, z\leqq\pi, \quad \arg z=\mathrm{Arg}\, z+2n\pi\, (n=0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{1.10}$$

絶対値については，つぎの等式または不等式が成り立つことがわかる．

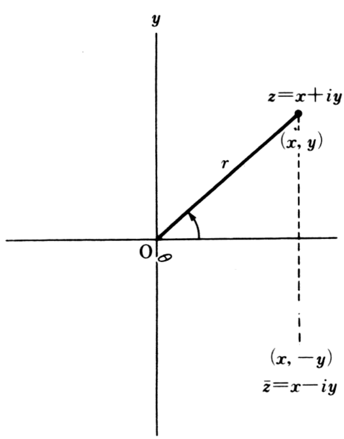


図 1.1　複素平面

$$z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2, \quad |z|=|-z| \tag{1.11}$$

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \tag{1.12}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2\neq 0) \tag{1.13}$$

$$|z_1\pm z_2|\leqq|z_1+z_2| \quad (\text{三角不等式, triangle inequality}) \tag{1.14}$$

三角不等式は図 1.2 をみれば明らかであるが，計算によっても容易に導くことができる．$z_1=x_1+iy_1$，　$z_2=x_2+iy_2$ とすると

$$|z_1\pm z_2|=\sqrt{(x_1\pm x_2)^2+(y_1\pm y_2)^2}, \quad |z_1|=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}, \quad |z_2|=\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$$

$$\therefore \quad (|z_1|+|z_2|)^2-|z_1\pm z_2|^2=2\left\{\sqrt{(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2})(x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2})}\mp(x_1x_2+y_1y_2)\right\}$$

ところが

$$(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2})(x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2})-(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1y_2-y_1x_2)^2\geqq 0$$

したがって

$$(|z_1|+|z_2|)^2\geq|z_1\pm z_2|^2$$

$$\therefore \quad |z_1|+|z_2|\geq|z_1\pm z_2|$$

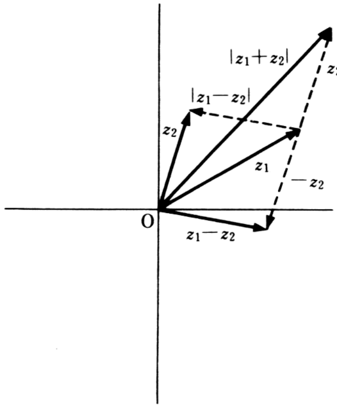


図 1.2　三角不等式

つぎに偏角に関するつぎの公式を示そう．

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \tag{1.15}$$

$$z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta_1), \quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

とおくと，三角関数の加法定理から

$$z_1z_2=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\}$$
$$=r_1r_2\{(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \quad (1.16)$$
$$\therefore\quad \arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$$

(1.15) を用いると

$$z^{-1}=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\} \quad (1.17)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\quad (z_2\neq 0) \quad (1.18)$$

$$\therefore\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2 \quad (1.19)$$

が成り立つことがわかる．

z の極形式を用いると，そのベキ乗 z^n，およびべき根 $z^{\frac{1}{n}}$ を計算するのに便利である．いま $z\neq 0$ の極形式を

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とすると，(1.16)，(1.17)から

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots) \quad (1.20)$$

がみたされる．これを**ド・モアブルの公式**（de Moiver's formula, A. de Moiver (1667－1754)）という．また，$\alpha\neq 0$ に対して

$$z^n=\alpha$$

の根を求めてみる．α を極形式で

$$\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

と表せば，等式

$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

から $r^n=\rho$，$n\theta=\varphi+2k\pi$（k＝整数）が得られる．したがって

$$r=\rho^{\frac{1}{n}},\quad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

であるが，これらの θ の中で互いに 2π の倍数の差を有するものを同じとみなして，n 個の互いに異なる根は

$$z_k=\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1) \quad (1.21)$$

によって与えられる．これらの根を表す n 個の点 $z_k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ は，原点を中心，半径 $\rho^{\frac{1}{n}}$ の円に内接する正 n 角形の頂点となっていることは容易にわかる．

例 1.1　$z^4=-4$ の根（図 1.3）

$$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$\therefore\quad z_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,1,2,3)$$

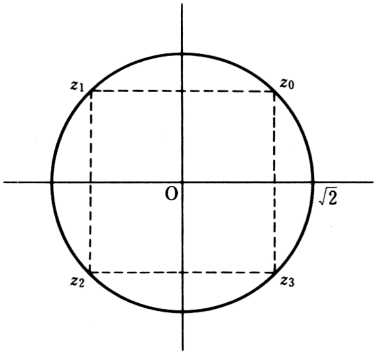


図 1.3　$z^4=-4$ の根

なお，ここで**オイラーの公式**（Euler's formula, L. Euler（1707－1783））（§1.3 で説明する）

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1.22}$$

を用いると，z の極形式は簡単につぎの形で表される．

$$z=re^{i\theta} \tag{1.23}$$

C.　点 z_0 を中心として半径 ε の円の内部の点全体

$$|z-z_0|<\varepsilon\quad(\varepsilon>0)$$

を z_0 の **ε-近傍**（ε-neighborhood）という．点 z_0 のある ε-近傍が集合 S の点のみから成っているとき，z_0 は S の**内点**（interior point）といい，z_0 の適当な ε-近傍で S の点を含まないものがある場合，z_0 を S の**外点**（exterior point）という．z_0 が S の内点でも外点でもない場合，すなわち，z_0 のどんな ε 近傍をとっても S の点と S に属さない点を含むとき，z_0 は S の**境界点**（boundary point）であるという（図 1.4）．

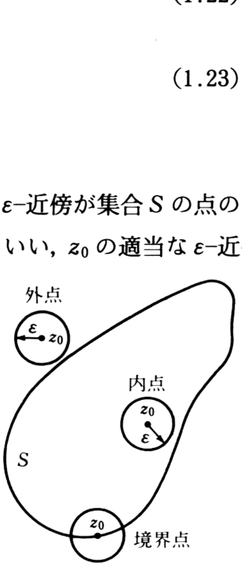


図 1.4　内点，外点，境界点

集合 S が内点ばかりからなっている，あるいは S は境界点を含まない集合であるとき S は**開集合**

(open set) であるという．また，境界点をすべて含む集合を**閉集合** (closed set) という．集合 S に S の境界点をすべて合併して得られる閉集合を S の**閉包** (closure) といい $\overline{S}$ で表す．

例 1.2

$S_1=\{|z|<1\}$ は開集合，　$\overline{S_1}=\{|z|\leqq 1\}$

$S_2=\{|z|\leqq 2\}$ は閉集合，　$\overline{S_2}=S_2$

$S_3=\{1<|z|\leqq 2\}$ は開集合でも閉集合でもない．　$\overline{S_3}=\{1\leqq|z|\leqq 2\}$

集合 S の任意の 2 点 z_1，z_2 を，S に属する有限個の線分をつないで結ぶことができるとき，S は**連結** (connected) しているという．連結した開集合を**領域** (domain) といい，領域の閉包を**閉領域** (closed domain) という．

点 z_0 の任意の近傍が z_0 と異なる S の点を少なくとも 1 つ含む場合，z_0 は S の**集積点** (accumulation point) とよばれる．

微分方程式の研究においては，複素平面上を $|z|$ がどんどん大きくなっていくときの解の振舞いを調べることは重要なことである．そこで，複素平面に ∞ で表される無限遠点を付け加えると便利である．ε が十分小さな正数であるとき

$$|z|>\frac{1}{\varepsilon}$$

をみたす集合を ∞ の ε-近傍，または単に ∞ の近傍という．

1.2　正則関数

A. 複素数の集合 D の点 z に，複素数の集合 S の点 w を対応させる関数，すなわち複素関数

$$w=f(z)$$

が与えられているとき，D を f の**定義域** (domain of definition)，S を f の**値域** (range) という．関数の定義域が明示されていない場合は，考えられる最大の集合をその定義域とみなすことにしよう．また，$f(z)=z^{1/2}$ のように，1 つの z に対し 2 つまたは 2 つ以上の値が対応しているような関数を**多価関数** (multi-valued function) という．$f(z)=z^{1/2}$ の場合，$f(0)=0$ で，$z\neq 0$ に対しては，たとえば

$$f(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\theta}{2}}\quad(-\pi<\arg\theta\leqq\pi) \tag{1.24}$$

または

$$f(z)=|z|^{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}\quad(-\pi<\arg\theta\leqq\pi) \tag{1.25}$$

と定義することにより，複素平面上の各点 z に対し，ただ 1 つの値が対応するようにできる．$f(z)$ が各 z に対してただ 1 つの値が対応しているとき，$f(z)$ は **1 価関数** (single-valued function) であるという．多価関数は適当に値を選ぶことによって，1 価関数にすることができる．(1.24) と (1.25) はそれぞれ，全複素平面上で定義された 1 価関数である．今後はとくに注意しない限り 1 価関数を考えるものとする．

$z=x+iy$ における f の値を $w=u+iv$,

$$u+iv=f(x+iy)$$

とおくと，u, v はそれぞれ実数 x と y の実関数である．たとえば，$f(z)=z^2$ の場合，$f(z)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$ であるから

$$u=x^2-y^2, \quad v=2xy$$

である．一般に複素変数 $z=x+iy$ の関数 $w=f(z)$ は

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1.26}$$

と表すこともできる．

実関数の場合と同じ手順で，複素関数に対しても，関数の極限，連続性，そして微分可能性について説明しよう．

B. 関数 $w=f(z)$ において，z が一定の値 z_0 以外の値をとりながら，z_0 に限りなく近づくとき，その近づき方によらず関数 $f(z)$ の値が一定の値 w_0 に限りなく近づくならば，「z が z_0 に近づくとき，関数 $f(z)$ には**極限値** (limit) が存在し，その値は w_0 である」という．または，「z が z_0 に近づくとき，$f(z)$ は w_0 に収束する」といい

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \quad \text{または} \quad f(z)\to w_0(z\to z_0) \tag{1.27}$$

とかく．厳密には，いわゆる ε-δ 論法を用いてつぎのように表す：

“任意の正数 ε に対して，適当な正数 δ が存在して

$$0<|z-z_0|<\delta \quad \text{ならば} \quad |f(z)-w_0|<\varepsilon \tag{1.28}$$

が成り立つようにできる.”

$z_0=\infty$ の場合には (1.27) は

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \quad \text{または} \quad f(z)\to w_0(z\to\infty) \tag{1.29}$$

であるが，これに対応して

“任意の正数 ε に対して，適当な正数 R が存在して

$$|z|>R \quad \text{ならば} \quad |f(z)-w_0|<\varepsilon \tag{1.30}$$

が成り立つようにできる” ということになる．

$z=x+iy$,　$z_0=x_0+iy_0$,　$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,　$w_0=u_0+iv_0$ とすると，(1.27) は

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

と同値であり，(1.28) は

"任意の正数 ε に対し，適当な正数 δ が存在して

$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ ならば $\sqrt{(u(x,y)-u_0)^2+(v(x,y)-v_0)^2}<\varepsilon$

が成り立つようにできる" と同値である．また，$z_0=\infty$ の場合にも (1.29) および (1.30) と同値な表現は容易に与えられる．

極限の定義では，$f(z)$ は z_0 で必ずしも定義されていなくてもよいが，もし $f(z)$ が z_0 で定義され，かつ z が z_0 に近づくときの極限値が $f(z_0)$ に等しいとき，すなわち

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \tag{1.31}$$

であるとき，$f(z)$ は z_0 で**連続** (continuous) であるという．ε–δ 論法で表せば

"任意の正数 ε に対し，適当な正数 δ が存在し

$$|z-z_0|<\delta \quad ならば \quad |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \tag{1.32}$$

が成り立つとき，$f(z)$ は z_0 で連続である" ということになる．

$f(z)$ が集合 D の各点で連続であるとき，$f(z)$ は D で連続であるという．

極限や連続性の定義は実関数の微分積分学における定義とまったく同じであるから，つぎの定理が成り立つことは明らかであろう．

定理 1.1　$f(z)$ および $g(z)$ は $z=z_0$ で連続であるとすると

$$f(z)\pm g(z), \quad f(z)g(z), \quad \frac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z_0)\neq 0)$$

は z_0 で連続である．

C. $w=f(z)$ を，$z=z_0$ のある近傍：$|z-z_0|<r$ で定義された複素関数とする．関数

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

は $0<|z-z_0|<r$ で意味をもつが，これが $z\to z_0$ のとき有限な極限値をもつならば，$f(z)$ は z_0 において**微分可能** (differentiable) であるという．この極限値を

z_0 における $f(z)$ の**微分係数**（differential coefficient）とよび，$f'(z_0)$ で表す．

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0) \tag{1.33}$$

$f'(z_0)$ を $df(z_0)/dz$，dw/dz などとかく．

複素関数の微分可能性の定義も，形式的に微分積分学と同じであるから，つぎに述べる定理が成り立つ．

定理 1.2 $f(z)$ が z において微分可能ならば，$f(z)$ は必然的に z において連続である．

定理 1.3 $f(z)$ および $g(z)$ が微分可能ならば

$$\{f(z)+g(z)\}'=f'(z)+g'(z)$$

$$\{f(z)\cdot g(z)\}'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2} \quad (g(z)\neq 0)$$

定理 1.4 $w=f(z)$ と $\varphi=g(w)$ の合成関数が定義でき，かつ $f(z)$ と $g(w)$ が微分可能ならば

$$\frac{dg(f(z))}{dz}=\frac{dg(w)}{dw}\frac{df(z)}{dz}$$

例 1.3 $f(z)=z^n (n=1, 2, \cdots)$, $f'(z)=nz^{n-1}$

つぎに，$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ が $z_0=x_0+iy_0$ のある近傍 $|z-z_0|<r$ で定義されているとき，z_0 において微分可能であるための $u(x, y)$ と $v(x, y)$ に対する条件を調べてみよう．

まず，$f(z)$ は $z_0=x_0+iy_0$ で微分可能とする．

$$z=z_0+\Delta z, \quad \Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

とおくと

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\frac{\{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0, y_0)\}+i\{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0, y_0)\}}{\Delta x+i\Delta y}$$

ここで，$\Delta z = z - z_0$ をどのように0に近づけても，$f'(z_0)$ に収束することに注意して

$$\Delta y = 0,\ \ \Delta x \to 0 \quad \text{として} \qquad f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \tag{1.34}$$

$$\Delta x = 0,\ \ \Delta y \to 0 \quad \text{として} \qquad f'(z_0) = \frac{1}{i}\{u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)\} \tag{1.35}$$

したがって

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

が成り立つ．

定理 1.5　$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ の近傍で定義されており，$f(z)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ で微分可能ならば，$u(x, y)$ および $v(x, y)$ はともに (x_0, y_0) において，x および y に関して偏微分可能であって，かつ**コーシー・リーマンの関係式**（Cauchy–Riemann equation, A. L. Cauchy（1789－1857），G. F. B. Riemann（1826－1866））とよばれる一対の方程式

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \tag{1.36}$$

をみたす．

逆につぎの定理が成り立つ．

定理 1.6　$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が $z_0 = x_0 + iy_0$ の近傍で定義されており，かつ $u(x, y)$ および $v(x, y)$ は (x_0, y_0) の近傍において連続な偏導関数 $\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$，$\partial v/\partial x$，$\partial v/\partial y$ をもつものとする．このとき，もし (x_0, y_0) においてコーシー・リーマンの関係式（1.36）が成り立つならば，$f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能であり，微分係数は（1.34），（1.35）で与えられる．

D.　ここで正則関数の定義を与えよう．

定義　$f(z)$ が点 z_0 のある近傍の各点において微分可能であるとき，$f(z)$ は z_0 で**正則**（regular, holomorphic）であるという．また，$f(z)$ が複素平面上のある領域 D において定義され，D の各点で正則であるとき，$f(z)$ は D で正則であるという．

このとき，D の各点における $f(z)$ の微分係数を $f'(z)$ で表し，これを $f(z)$ の**導関数**（derivative, derieved function）という．

例 1.4

（1） $f(z)=\mathrm{Re}(z)=x$ とすれば $u(x,y)=x$, $v(x,y)=0$

$$u_x=1, \quad u_y=0, \quad v_x=0, \quad v_y=0$$

ゆえにコーシー・リーマンの関係式は成り立たない．したがって，$f(z)=x$ はいかなる点においても微分可能ではない．

（2） $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ とすると，$u_x=2x$, $u_y=2y$, $v_x=0$, $v_y=0$. コーシー・リーマンの関係式は $z=0$ だけみたされる．明らかに，u_x, u_y, v_x, v_y は全平面で連続である．したがって定理 1.6 から，原点においてのみ微分可能である．しかし，原点においても正則ではない．

（3） $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ とする．$u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$

$$u_x=v_y=e^x\cos y, \quad u_y=-v_x=-e^x\sin y$$

u_x, u_y, v_x, v_y は全平面で連続であり，かつコーシー・リーマンの関係式をみたす．よって，$f(z)$ は全複素平面で微分可能，したがってまた正則である．この例のように全平面で正則な関数を**整関数**（entire function）という．

1.3 初等関数(elementary function)

ここでは，微分積分学で学んだ**指数関数**（exponential function），**対数関数**(logarithmic function)，**三角関数**（trigonometric function）などいろいろな初等関数について，複素変数 $z=x+iy$ の関数として定義する．この場合，とくに実数 $z=x+i\cdot 0$ に対しては微分積分学におけるものと一致するようにしたい．

A. 指数関数 e^z（$\exp z$ ともかく）

複素変数 $z=x+iy$ の関数 $f(z)=e^z$ をつぎのように定義する．

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{1.37}$$

$y=0$ の場合には $f(z)=e^x$ であり，任意の点 $z=x+iy$ においてコーシー・リーマンの関係式をみたしているので微分可能，しかも（1.34）から

$$(e^z)'=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z \tag{1.38}$$

をみたす．また，$z=i\theta$（θ は実数）の場合には

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

となる．これはオイラーの公式（1.22）である．したがって，(1.37) は

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy} \quad (z=x+iy)$$

とかくことができる．e^zの定義から

$$\mathrm{Re}(e^z)=e^x\cos y, \quad \mathrm{Im}(e^z)=e^x\sin y, \quad |e^z|=e^x$$

$$\arg e^z = y + 2n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \quad e^{z+2n\pi i} = e^z \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

である．さらに，e^z に対して指数法則

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad e^0 = 1$$

が成り立つことは容易に示される．

B. 三角関数

x を実数とすると，オイラーの公式から

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

とかくことができる．そこで，複素変数 z に対して $\sin z$，$\cos z$ を

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.39}$$

によって定義する．合成関数の微分公式から，$(e^{iz})' = ie^{iz}$，$(e^{-iz})' = -ie^{iz}$ であることに注意すれば，つぎが成り立つ．

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \tag{1.40}$$

e^z，$\sin z$，$\cos z$ は整関数である．指数関数の性質から実変数のときと同じつぎの等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z \\
&\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \\
&\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\
&\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\
&\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \\
&\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$\sin z$，$\cos z$ の実部と虚部は定義（1.39）とオイラーの公式を用いることにより

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\
&= \frac{(\cos x + i \sin x)e^{-y} - (\cos x - i \sin x)e^y}{2i} \\
&= \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2}
\end{aligned}$$

$\cos z$ についても同様にして，つぎが得られる．

$$\begin{aligned}\sin z&=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\\ \cos z&=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y\end{aligned}\tag{1.42}$$

例 1.5

（1） $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2i}$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2i}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

（2） $\cos\frac{\pi}{2}i=\frac{e^{\frac{\pi}{2}i^2}+e^{-\frac{\pi}{2}i^2}}{2}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}=\cosh\frac{\pi}{2}$

（3） $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}i\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cosh\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{3}\sinh\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cosh\frac{\pi}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh\frac{\pi}{4}$$

例 1.6 $\sin z$ と $\cos z$ の零点を求めてみよう．

$\sin z=0$ となるためには $z=x+iy$ とおいて，(1.42) から

$$\sin x\cosh y=0,\quad \cos x\sinh y=0$$

$\cosh y\neq 0$ であるから $\sin x=0$，$\therefore x=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．このとき，$\cos x=\pm1$．したがって，$\sinh y=0$ でなければならない．すなわち $y=0$．

$$\therefore\quad z=n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

同様にして $\cos z=0$ をみたす z は

$$z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$\sin z$，$\cos z$ 以外の三角関数は

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \operatorname{cosec} z=\frac{1}{\sin z}$$

によって定義する．

C. 対数関数

正数 r の自然対数を $\mathrm{Log}\,r$ で表すとき，複素数 $z=re^{i\theta}(r\neq 0)$ の対数関数を

$$\log z=\mathrm{Log}\,r+i\theta\tag{1.43}$$

と定義する．$z=re^{i\theta}$ における θ の主値 $\mathrm{Arg}\,z$ を $\Theta(-\pi<\Theta\leqq\pi)$ とおけば

$$\log z=\mathrm{Log}\,r+i(\Theta+2n\pi)\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)\tag{1.44}$$

となるから，$\log z$ は**無限多価関数**（infinitely many valued function）である．$n=0$ の場合の値を $\log z$ の**主値**といい，$\mathrm{Log}\, z$ で表す．これは1価関数である．

$$\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\, r + i\,\mathrm{Arg}\, z \quad (r \neq 0,\ -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi) \tag{1.45}$$

例 1.7

（1）　$\log(1+i) = \mathrm{Log}\sqrt{2} + i\left(\dfrac{1}{4} + 2n\right)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

（2）　$\mathrm{Log}(1+i) = \mathrm{Log}\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$

任意の $z \neq 0$ に対して，$z = re^{i\theta}$ とおくと，$\log z = \mathrm{Log}\, r + i\theta$．よって

$$e^{\log z} = e^{\mathrm{Log}\, r + i\theta} = e^{\log r + i\theta} = re^{i\theta} = z \tag{1.46}$$

が成り立つ．しかし，一般には $\log e^z = z$ は成り立たない．それは，$e^z = e^x \cdot e^{iy}$ より $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y + 2n\pi$ だから

$$\log e^z = \mathrm{Log}\, e^x + i(y + 2n\pi) = x + iy + 2n\pi i = z + 2n\pi i \tag{1.47}$$

となるからである．

とくに対数関数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ をとれば，(1.46) と (1.47) ($n=0$) から指数関数と対数関数は互いに逆関数の関係になる．そこで，(1.46) の両辺を z で微分すると（定理 1.4）

$$(e^{\mathrm{Log}\, z})' = e^{\mathrm{Log}\, z} \cdot (\mathrm{Log}\, z)' = 1$$

$$\therefore \quad (\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{e^{\mathrm{Log}\, z}} = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0,\ -\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi)$$

したがって，つぎの定理が得られる．

定理 1.7　対数関数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ は領域

$$|z| > 0, \quad -\pi < \mathrm{Arg}\, z < \pi$$

で1価，正則であり，その導関数は

$$(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z}$$

となる．

上の定理において主値の代わりに，対数関数 $\log z$ を領域

$$|z| > 0, \quad \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi \quad (\alpha \text{ は任意実数})$$

で考えても全く同じ結果が成り立つ．

D. 複素数のベキ

$z\neq0$ のとき，複素数 z と複素数 c のベキ z^c を

$$z^c=\exp(c\log z)\quad(z\neq0) \tag{1.48}$$

で定義する．$\log z$ が無限多価であるから，z^c も無限多価である．しかし定理1.7のあとで述べたように，任意の実数 α に対し $\log z$ は

$$z\neq0,\quad \alpha<\arg z<\alpha+2\pi$$

において1価正則となるから，同じ領域で z^c も1価正則となる．導関数は合成関数の導関数の公式から

$$(z^c)'=(e^{c\log z})'=(c\log z)'e^{c\log z}=\frac{c}{z}\cdot z^c=cz^{c-1}$$

すなわち

$$(z^c)'=cz^{c-1}\quad(z\neq0,\ \alpha<\arg z<\alpha+2\pi) \tag{1.49}$$

が成り立つ．z^c の定義式（1.48）の $\log z$ を主値 $\mathrm{Log}\,z$ でおきかえたものを z^c の主値という．

つぎに複素数 $c\neq0$ に対し，指数関数 c^z を

$$c^z=\exp(z\log c) \tag{1.50}$$

で定義する．任意の z に対して

$$(c^z)'=(e^{z\log c})'=(z\log c)'e^{z\log c}=(\log c)c^z \tag{1.51}$$

が成り立つ．z^c と c^z の違いに注意しよう．

一般に z^c とか，$\log z$ などのような多価関数 $f(z)$ について，各 z に対して，いくつかある $f(z)$ の値の中から1つずつ選んでできる関数を $F(z)$ とすると，$F(z)$ は1価関数となるが，さらに適当な領域で $F(z)$ が正則になるとき，$F(z)$ を多価関数 $f(z)$ の分枝という．たとえば（1.24）および（1.25）は $z^{1/2}$ の分枝であり，また $\log z$ の主値 $\mathrm{Log}\,z$ も1つの分枝である．z^c や $\log z$ において $z=0$ を多価関数の**分岐点**（branch point）という．同様に，$(z-a)^c$ や $\log(z-a)$ において $z=a$ は分岐点である．多価関数の分岐点の正確な定義はたとえば文献［2］を参照すること．

1.4 複素積分

複素積分は複素平面上に曲線 C と，C を含む領域 D において与えられた複素関数 $f(z)$ によって定義される．

A. 複素平面上の曲線

$x(t), y(t)$ を実変数 t の連続な実数値関数とすると

$$z(t)=x(t)+iy(t) \quad (a \leqq t \leqq b) \tag{1.52}$$

は複素平面上の曲線 C を定義する．これを弧 C とよぶ．この弧は t が a から b に増加するとき，点 $z(a)$ から点 $z(b)$ までの向きをもつ点集合である．弧 C が $t_1 \neq t_2$ のとき $z(t_1) \neq z(t_2)$ となるとき，すなわち自分自身と交わらないとき，この C を**単純弧**（simple arc）または**ジョルダン弧**（Jordan arc）とよぶ．

C の端点 $z(a)$ と $z(b)$ が一致する以外自分自身と交わらない場合，この C は**単一閉曲線**（simple closed curve）または**ジョルダン曲線**（Jordan curve）とよばれる．ジョルダン曲線に対しては，正の向きと負の向きが定義される．すなわち，反時計回りの方向を**正の向き**（positive, counterclockwise direction）とし，時計回りの方向を**負の向き**（negative, clockwise direction）という．

曲線を表す関数 $z(t)$ の導関数 $z'(t)$ を

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t) \tag{1.53}$$

で定義する．$x'(t)$ と $y'(t)$ が $a \leqq t \leqq b$ で連続であるとき，曲線 C は**微分可能な弧**（differentiable arc）であるといい，このとき

$$|z'(t)|=\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}$$

は連続関数であるから積分可能である．微分積分学の公式から曲線 C の長さ L は

$$L=\int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b |z'(t)|\,dt \tag{1.54}$$

で与えられる．

$z=z(t)$（$a \leqq t \leqq b$）が微分可能で $z'(t) \neq 0$ であるとき，この曲線 C は**なめらか**（smooth）であるという．なめらかないくつかの弧をつないでできる弧を**区分的になめらかな**（piecewise smooth）弧とよぶ．

B. 複素関数の積分

曲線 C は

$$z(t)=x(t)+iy(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

で定義され区分的になめらかな弧であるとする．$z_1=z(a)$，$z_2=z(b)$ はそれぞれ，C の始点と終点である．また，関数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ は C 上で区分的に連続な関数，すなわち $f(z(t))$ の実部 $u(x(t), y(t))$，および虚部 $v(x(t), y(t))$ はともに t の関数として有限個の点を除いて連続関数であるとする．

このとき，曲線 C に沿った $f(z)$ の**複素積分**を

$$\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt \tag{1.55}$$

によって定義する．ただし右辺の積分は実変数 t の複素数値関数の積分としてつぎのように計算する．

$$\text{右辺}=\int_a^b (u+iv)(x'+iy')dt=\int_a^b (ux'-vy')dt+i\int_a^b (uy'+vx')dt$$

ここで，ベクトル解析の線積分の記法を用いると

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx \tag{1.56}$$

曲線 C を積分（1.55）の**積分路**（integral path, contour）という．定義によれば，複素積分は複素平面上の曲線 C を実変数 t のパラメータ表示することにより，実関数の定積分に帰着される．したがって，実関数の積分に関する性質に対応してつぎの定理が成り立つ．

定理 1.8

（1） 積分（1.55）は積分路 C のパラメータ表示によらず一定の値をもつ．

（2） $z_1=z(a)$ と $z_2=z(b)$ を結ぶ積分路 C の代りに，z_2 から C に沿って逆向きに z_1 を結ぶ積分路を $-C$ で表すと

$$\int_{-C} f(z)dz=-\int_C f(z)dz$$

（3） $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$

（C_1+C_2 は $f(z)dz$ の終点と C_2 の始点をつないだ曲線を表す）

（4） $\displaystyle\int_C z_0 f(z)dz=z_0\int_C f(z)dz$ （z_0 は複素数）

（5） $\displaystyle\int_C \{f(z)+g(z)\}dz=\int_C f(z)dz+\int_C g(z)dz$

（6） $\displaystyle\left|\int_C f(z)dz\right|\leqq\int_C |f(z)||dz|\leqq ML$ （$|f(z)|\leqq M$，$L=C$ の長さ）

$$|dz|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

例 1.8 C_1 を**単位円**（unit circle）$|z|=1$ の上半分で，向きは -1 から 1 に向かう（負の方向）曲線とし，C_2 は単位円の下半分で，向きは -1 から 1 に向かう

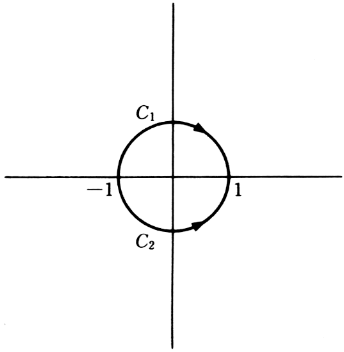


図 1.5　単位円

（正の方向）ものとする（図 1.5）.

このとき，積分 $\int_{C_i} \bar{z}\,dz$ と $\int_{C_i} z^2 dz\,(i=1,2)$ を求めよう.

積分路 C_1 と C_2 のパラメータ表示は

$$C_1：\quad z=e^{i(\pi-t)}=e^{i\pi}\cdot e^{-it}=-e^{-it}\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

$$C_2：\quad z=e^{it}\quad (\pi\leqq t\leqq 2\pi)$$

また，C_1 上で

$$z=z(t)=-e^{-it}=-(\cos t-i\sin t)$$

$$\therefore\quad z'(t)=\sin t+i\cos t=ie^{-it}$$

$$\int_{C_1}\bar{z}\,dz=\int_0^{\pi}\overline{\{-e^{-it}\}}\,ie^{-it}dt=\int_0^{\pi}-e^{it}ie^{-it}dt=\int_0^{\pi}-idt=-\pi i$$

$$\int_{C_1}z^2dz=\int_0^{\pi}\{-e^{-it}\}^2ie^{-it}dt=\int_0^{\pi}ie^{-3it}dt$$

$$=i\int_0^{\pi}\{\cos 3t-i\sin 3t\}dt=\frac{2}{3}$$

同様にして

$$\int_{C_2}\bar{z}\,dz=\int_{\pi}^{2\pi}\overline{\{e^{it}\}}\,ie^{it}dt=i\int_{\pi}^{2\pi}e^{-it}e^{it}=\pi i$$

$$\int_{C_2}z^2dz=\int_{\pi}^{2\pi}(e^{it})^2ie^{it}dt=i\int_{\pi}^{2\pi}e^{3it}dt=\frac{2}{3}$$

1.5 コーシー・グルザの積分定理

A. 関数論の基本定理とよばれるコーシーの積分定理について説明しよう．x–y 平面の区分的になめらかなジョルダン曲線（単一閉曲線）C で囲まれた閉集合 R において，実関数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ は，その1階偏導関数とともに連続であるとする．曲線 C の向きは正方向であるとする．このときベクトル解析で習う線積分に対する**グリーンの定理**（Green's theorem）

$$\int_C Pdx+Qdy=\int\int_R (Q_x-P_y)dxdy$$

が成り立つ．いま，R で正則な関数 $f(z)$ を

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

とおく．C に沿った $f(z)$ の積分は（1.56）から

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$$

したがって，もし $f'(z)$ が連続ならば，u と v の1階偏導関数は連続となり，グリーンの定理が適用できて

$$\int_C f(z)dz=\int\int_R(-v_x-u_y)dxdy+i\int\int_R(u_x-v_y)dxdy$$

ところが，$f(z)$ は正則であるから定理1.5よりコーシー・リーマンの関係式が成り立ち，積分の値は0となってしまう．

この顕著な結論は，グルサ（É. J. B. Goursat（1858－1936））によって，仮定“$f'(z)$ が連続”がなくても同じ結論が成り立つことが証明された．すなわち，つぎの定理が成り立つ．

> **定理 1.9** 区分的になめらかなジョルダン曲線 C の上と内部で正則な関数 $f(z)$ に対して
>
> $$\int_C f(z)dz=0$$
>
> が成り立つ．（**コーシー・グルサの積分定理**，Cauchy–Goursat theorem）

この定理において，$f'(z)$ の連続性の仮定を取り除いたことが重要である．実は後で示す定理1.15からわかるように，$f(z)$ が正則ならば $f'(z)$ も正則となるから，$f'(z)$ は当然連続である．しかし，定理1.15を示すためにはこの定理1.9が

基礎となるのである．定理 1.9 の証明は関数論の教科書にゆだねることとし，ここでは応用上便利な別の表現を与えよう．

領域 D があって，D 内にいかなるジョルダン曲線 C を描いても，C の内部が D の点ばかりから成るとき，D は**単連結**（simply connected）であるという．これに反して，たとえば円環 $1<|z|<2$ とか，2つ以上のジョルダン曲線で囲まれた領域などは単連結ではない．単連結でない領域は**多重連結**（multiply connected）であるという．

定理 1.9 はつぎのように述べることもできる．

> **定理 1.10**　$f(z)$ は単連結な領域で正則であるとする．D 内の区分的になめらかな任意のジョルダン曲線 C に対してつぎが成り立つ．
>
> $$\int_C f(z)dz=0$$

この定理 1.10 は C がジョルダン曲線でなく，自分自身と交わっていても正しい．証明はつぎの定理 1.11 の証明から容易に得られる．

> **定理 1.11**　C_1 と C_2 を単連結領域 D 内の 2 点 z_1，z_2 を結ぶ区分的になめらかな曲線であるとする．このとき $f(z)$ が D で正則ならば
>
> $$\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz \tag{1.57}$$
>
> が成り立つ．

この定理は単連結領域における正則関数の積分が，積分路には関係なく端点のみで定まることを意味している．

証明　図 1.6 のように C_1 と C_2 が z_0 で交わっている場合を考えよう．

定理 1.9 から

$$\int_{C_1 z_1}^{z_0} f(z)dz+\int_{C_2 z_0}^{z_1} f(z)dz=0,$$

$$\int_{C_1 z_0}^{z_2} f(z)dz+\int_{C_2 z_2}^{z_0} f(z)dz=0$$

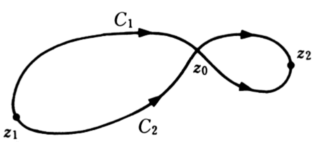


図 1.6

したがって

$$\int_{C_1} f(z)dz-\int_{C_2} f(z)dz=0$$　（証明終）

ここで，定理 1.11 の逆が成り立つことを述べておこう．

定理 1.12　$f(z)$ は単連結領域 D において連続，かつ D 内の任意の 2 点 α と β に対し，α と β を D 内で結ぶ任意の区分的になめらかな曲線を C で表したとき，C の選び方によらず

$$\int_C f(z)dz$$

は一定の値をとるものとする．このとき，α を D 内に固定し，z を D の任意の点とすれば，α から z までの積分は積分路によらないから，z の関数とみなすことができる．そこで，$F(z)$ を

$$F(z)=\int_{\alpha}^{z} f(z)dz$$

とおけば，$F(z)$ は D において正則であり，かつ $F'(z)=f(z)$ が成り立つ．すなわち，$F(z)$ は $f(z)$ の**原始関数**（primitive function）である．

この定理と後で示す定理 1.15 から，定理 1.12 の仮定のもとで $f(z)=F'(z)$ は D で正則となることがわかる．

証明　z_0 を D の点とする．$f(z)$ の連続性から，任意の正数 ε に対し正数 δ を適当にとり，$U(z_0)=\{|z-z_0|<\delta\}$ は D に含まれ，かつ $U(z_0)$ の各点 z に対し $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ とできる．C_0 を α と z_0 を結ぶ曲線とし，C_0 に線分 $\overline{z_0z}$ を付加して得られる曲線を C とする（図 1.7）．

$$F(z)=\int_C f(z)dz=\int_{C_0+\overline{z_0z}} f(z)dz, \quad F(z_0)=\int_{C_0} f(z)dz$$

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|=\left|\frac{1}{z-z_0}\left\{\int_{\overline{z_0z}} f(z)dz-f(z_0)(z-z_0)\right\}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{z-z_0}\int_{\overline{z_0z}}\{f(z)-f(z_0)\}dz\right|<\varepsilon$$

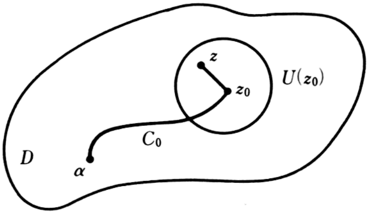


図 1.7

したがって，$F(z)$ は z_0 において微分可能で，かつ $F'(z_0)=f(z_0)$ をみたす.

（証明終）

B. コーシー・グルザの積分定理を多重連結な場合に拡張しよう．ジョルダン曲線 C_1 はジョルダン曲線 C の内部にあるとする．C と C_1 で囲まれた環状領域を D で表し，D にその境界点をすべて合併して得られる閉集合を $\overline{D}$ とする．$\overline{D}$ を含むある領域において，$f(z)$ が正則ならば

$$\int_{C-C_1} f(z)dz=0 \quad \text{または} \quad \int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz$$

が成り立つことを示そう．ただし，C と C_1 はともに正の向きにとるものとする．

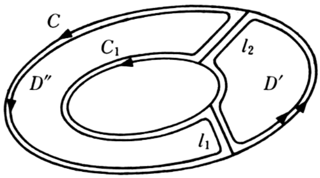


図 1.8

図 1.8 で示したように曲線 C と C_1 を曲線 l_1 と l_2 で結べば，D は D' と D'' に分けられる．いま，D' と D'' の境界であるジョルダン曲線 Λ' と Λ'' を正の向きにとれば，定理 1.9 から

$$\int_{\Lambda'} f(z)dz=0, \quad \int_{\Lambda''} (z)dz=0$$

ところが Λ' と Λ'' は，曲線 l_1 と l_2 上では向きが逆であるから

$$\int_{l_1(\Lambda')} f(z)dz+\int_{l_1(\Lambda'')} f(z)dz=0$$

$$\int_{l_2(\Lambda')} f(z)dz+\int_{l_2(\Lambda'')} f(z)dz=0$$

ここで，たとえば $l_1(\Lambda')$ は閉曲線 Λ' 上の l_1 の部分を表すものとする.

$$\therefore \quad \int_{C-C_1} f(z)dz=\int_{\Lambda'} f(z)dz+\int_{\Lambda''} f(z)dz=0$$

この結果は，さらにつぎのように一般化されることは明らかであろう（コーシー・グルザの定理（多重連結領域の場合））.

定理 1.13　C および $C_j(j=1,2,\cdots m)$ は区分的になめらかなジョルダン曲線で，C_j はすべて C の内部にあり，かつ互いに外にあるものとする．いま，C の内部にあって，かつすべての C_1, $C_2\cdots$, C_m の外にある点ばかりからなる領域を D とする．$f(z)$ が D の閉包 $\overline{D}$ を含む領域で正則ならば

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j} f(z)dz \tag{1.58}$$

ただし，C_1, C_2, $\cdots$, C_m はすべて正の向きをとるものとする（図 1.9）.

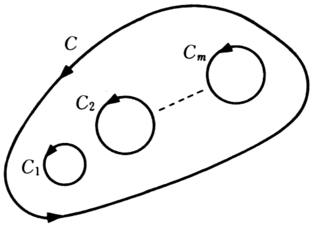


図 1.9

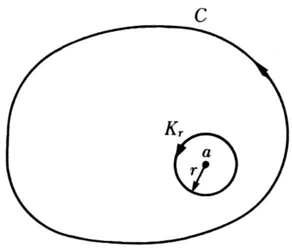


図 1.10

例 1.9 C を $z=a$ を内部にもつジョルダン曲線とし，K_r を a を中心，半径 r の円で C の内部に含まれるものとする（図 1.10）.

$$K_r: \quad z-a=re^{it} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

このとき，n を任意の整数として

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{K_r} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^n e^{nit}} dt = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-(n-1)it} dt$$

$$= \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases} \tag{1.59}$$

1.6 コーシーの積分公式とその応用

コーシー・グルザの積分定理と並んでもう 1 つの基本的な結果，すなわち，コーシーの積分公式を導く．これらの結果から，たとえば，（1）正則関数は何回でも微分でき，任意階数の導関数は正則であること，（2）テーラー展開ができること，（3）正則関数列の一様収束した極限は正則であること，などが示される.

A. コーシーの積分公式

定理 1.14 C を正の向きをもった区分的になめらかな曲線とし，$f(z)$ は C の上と内部で正則とする．z が C の内部の任意の点であるとき

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{1.60}$$

が成り立つ.　(**コーシーの積分公式**, Cauchys integral formula)

証明　公式 (1.60) を z の代わりに a, ζ の代わりに z とおいて証明する. まず, a を C の内部の点とし, a を中心として a と C との距離よりも小さい正数 r を半径とする円 K_r: $|z-a|=r$ を描く. 関数 $f(z)/(z-a)$ は $z=a$ を除いて, C の上と内部で正則であるから定理 1.13 を適用して

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz &= \int_{K_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \\ &= \int_{K_r} \frac{f(a)}{z-a}\,dz + \int_{K_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \\ &= 2\pi i f(a) + \int_{K_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz\end{aligned}$$

ところが, $f(z)$ は $z=a$ で正則, したがって連続である. よって任意の正数 ε に対して δ を十分小さくとれば

$$|z-a|<\delta \quad \text{ならば} \quad |f(z)-f(a)|<\varepsilon$$

が成り立つようにできる. そこで, $r<\delta$ ととれば

$$\begin{aligned}\left|\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz - 2\pi i f(a)\right| &\leqq \int_{K_r} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| |dz| \\ &\leqq \frac{2\pi r\cdot\varepsilon}{r} = 2\pi\varepsilon\end{aligned}$$

ε は任意の正数であるから

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

(証明終)

B. 正則関数の積分表示 (1.60) を用いて, $f'(z)$, $f''(z)$, … が存在し, 正則であることを示すことができる.

定理 1.15　$f(z)$ は区分的になめらかなジョルダン曲線 C の上と内部において正則であるとする. このとき, $f(z)$ は C の内部において無限回微分可能で

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{1.61}$$

が成り立つ.　(**コーシーの微積分公式**)

証明　$n=0$ の場合は (1.60) である．$n=1$ の場合を証明する．

(1.60) から

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-\Delta z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)\frac{1}{\Delta z}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta$$

z は C の内部の点であるから，z と C の距離を d とすると $d>0$．$|\Delta z|<d$ であるように小さくとり，$\Delta z\to 0$ とすることにより

$$\frac{df(z)}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$$

となることがわかればよい．それには

$$I=\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}d\zeta-\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta=\int_C\frac{f(\zeta)\cdot\Delta z}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}d\zeta$$

とおいて，$\lim_{\Delta z\to 0}|I|=0$ を示せばよい．$|\zeta-z|\geqq d$，$|\zeta-z-\Delta z|\geqq d-|\Delta z|$ であることに注意し，C の長さを L，C 上における $|f(z)|$ の最大値を M とすると

$$|I|=\left|\Delta z\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^2}d\zeta\right|\leqq|\Delta z|\frac{ML}{(d-|\Delta z|)d^2}$$

となり，(1.61) の $n=1$ の場合が示された．$n\geqq 2$ の場合も同様に証明することができる．　　(証明終)

多重連結な場合のコーシーの積分定理 (定理 1.13) を用いて，コーシーの微積分公式 (1.61) を一般化しておく

定理 1.16　C および $C_j (j=1, 2, \cdots, m)$ は区分的になめらかなジョルダン曲線で，C_j はすべて C の内部にあり，かつ互いに外にあるものとする．D を C の内部にあって，かつすべての C_j の外にある点ばかりからなる領域とする．$f(z)$ が D の閉包 $\overline{D}$ を含むある領域で正則とすると，D の各点 z において

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta-\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_j}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\quad(n=0, 1, 2, \cdots)\tag{1.62}$$

が成り立つ．ただし，$C, C_1, \cdots, C_m$ はすべて正の向きをとるものとする．

証明は定理 1.14 および定理 1.15 の証明と同様な議論をくり返せばよい．

C. 正則関数のテーラー展開を説明する前に，**関数項級数**（functions series）について述べておこう．領域 D において関数列

$$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$$

が定義されているとする．第 N 部分和

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$$

が $z=a \in D$ において極限値

$$\lim_{N\to\infty} S_N(a) = S$$

をもつとき，すなわち，任意の正数 ε に対し N_0 が存在して

$$|S - \sum_{n=1}^{N} f_n(a)| < \varepsilon \quad (N \geqq N_0)$$

をみたすとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は $z=a$ において収束し，和 S をもつという．

D の各点で収束するとき，$\Sigma f_n(z)$ は D で収束するという．ここで，ε に対し N_0 は一般に z に依存する（**各点収束**，pointwise convergence）．もし N_0 が D 内の全ての点で共通にとれるとき，$\Sigma f_n(z)$ は**一様収束**する（uniform convergence）という．また，D において

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$$

が収束するとき，**絶対収束**（absolute convergence）するという．さらに，D に含まれる全ての有界閉集合上で一様収束するとき，**広義一様収束**（uniform convergence in the wider sense）するという．各関数 $f_n(z)$ が $f_n(z) = a_n(z-a)^n$ の形をしているとき，すなわち

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

を**べき級数**（power series）という．

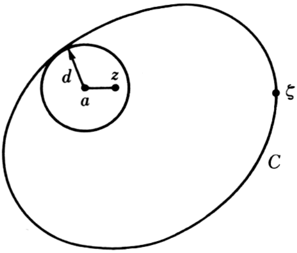


図 1.11

さて，$f(z)$ は区分的になめらかなジョルダン曲線 C の上で連続と仮定すると，C の内部の点 z に対して，積分

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad (1.63)$$

は意味をもつ．C の内部を D とすると，$\varphi(z)$ は D の各点 a の近傍でべき級数に展開される

ことを証明しよう．D の点 a と，曲線 C との距離を d とし，a を中心，半径 d の円 K を描き，K の内部の任意の点を z とする（図 1.11）．

このとき，C 上の各点 ζ に対して

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| \leqq \frac{|z-a|}{d} = k < 1$$

したがって

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{\zeta-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-a}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right\}$$

P.28 例1.10(1)を ここで使っている。∴ 流れとしてはまず(1)を証明する必要がある。

よって

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

ここで，$|f(\zeta)|$ の C 上における最大値を M とすると

$$\left|\varphi(z) - \sum_{n=0}^{N}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} - \sum_{n=0}^{N}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\right\}d\zeta\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\,\frac{\left(\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)^{N+1}}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}\,d\zeta\right| \leqq \frac{L}{2\pi}\,\frac{M}{d}\,\frac{k^{N+1}}{1-k} \to 0 \quad (N\to\infty)$$

ただし，L は曲線 C の長さである．

このようにして $\varphi(z)$ のべき級数展開

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta \quad (|z-a|<d)$$

が得られた．これとコーシーの積分公式（1.60），および（1.61）からつぎの**テーラー**（B. Taylor（1685 – 1731））**の定理**が得られた．

定理 1.17　C を区分的になめらかなジョルダン曲線とし，$f(z)$ は C の上と内部で正則であるとする．C の内部を D，D の任意の点を a，a と C の距離を d とすると，$f(z)$ は $|z-a|<d$ をみたす z に対して，$z-a$ のべき級数に一意的に展開される．すなわち

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (|z-a|<d) \tag{1.64}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

（テーラーの定理，Taylar's theorem）

特に，$f(z)$ が，a を中心，半径 d の円 C の内部で正則ならば，C 内の任意の z に対して $f(z)$ は (1.64) のようにべき級数展開ができる．(1.64) は $f(z)$ の a のまわりでの**テーラー展開**（Taylor expansion）とよばれ，形式的に微分積分学に現れるものと同じである．つぎの注意は微分積分学と同様に確かめられる．

注意　べき級数 $\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z-a)^\nu$ に対し**収束半径**（radius of convergence）$R(0\leqq R\leqq\infty)$ が存在する．$R>0$ ならば，このべき級数は $|z-a|<R$ において絶対収束し，かつ $R'<R$ なる任意の R' に対し，$|z-a|\leqq R'$ において一様収束する（広義一様収束）．このべき級数で定義される関数を $f(z)$ で表せば，$f(z)$ は $|z-a|<R$ において正則であり，導関数は $f'(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu c_\nu(z-a)^{\nu-1}$ で与えられる．また，$f'(z)$ の収束半径も R である．

この注意から (1.63) で定義される関数は C の内部の任意の点 $z=a$ の近傍で正則，したがって C の内部で正則ということになる．

例 1.10　つぎのテーラー展開は形式的には微分積分学で得られたものと同じであるが，成り立つ範囲が複素平面の領域となっている．

(1)　$\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$　　$(|z|<1)$

(2)　$e^z=1+z+\dfrac{1}{2!}z^2+\dfrac{1}{3!}z^3+\cdots$　　$(|z|<\infty)$

(3)　$\sin z=z-\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5+\cdots$　　$(|z|<\infty)$

(4)　$\cos z=1-\dfrac{1}{2!}z^2+\dfrac{1}{4!}z^4-\cdots$　　$(|z|<\infty)$

(5)　$\sinh z=z+\dfrac{1}{3!}z^3+\dfrac{1}{5!}z^5+\cdots$　　$(|z|<\infty)$

D. ワイヤストラス（K. T. W. Weierstrass (1815－1897)）**の定理**を証明する．

定理 1.18　領域 D において正則な関数列 $f_\nu(z)(\nu=1,2,\cdots)$ が，D において広義一様収束する．すなわち，D に含まれる任意の有界閉集合の上で一様収束するならば，その極限関数 $f(z)$ は D において正則である．さらに，n 次

の導関数 $f_\nu^{(n)}(z)$ $(n=1, 2, \cdots)$ は D において $f^{(n)}(z)$ に広義一様収束する．

（**ワイヤストラスの定理**, Weierstrass' theorem）

証明 a を D の任意の1点とし，a を中心，半径 d の円，$|z-a|=d$ を K とする．K とその内部は D に含まれるとすると，正則関数の積分表示（1.60）から $|z-a|<d$ において

$$f_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f_\nu(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

いま，z を固定すると，$\dfrac{f_\nu(\zeta)}{\zeta-z}$ はKの上で一様収束するから

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

すなわち，極限関数 $f(z)$ は $|z-a|<d$ において積分表示（1.60）をもち，したがって正則である．a が D の任意の点であることから，$f(z)$ は D で正則となる．つぎに公式（1.61）を用いて

$$f_\nu^{(n)}(z)-f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_K \frac{f_\nu(\zeta)-f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

いま，任意の ε に対し，N が存在して，$\nu\geqq N$ になるかぎり

$$|f_\nu(z)-f(z)|<\varepsilon$$

が成り立つようにできる．$|z-a|<d/2$ とすると，$|\zeta-z|\geqq d/2$ であるから

$$|f_\nu^{(n)}(z)-f^{(n)}(z)|\leqq\frac{n!\varepsilon\, 2^{n+1}2\pi d}{2\pi d^{n+1}}=\frac{n!2^{n+1}}{d^n}\varepsilon$$

よって，$f_\nu^{(n)}(z)$ は $\nu\to\infty$ のとき $|z-a|<d/2$ において $f^{(n)}(z)$ に一様収束する．こうして，$f_\nu^{(n)}(z)$ は D の各点の近傍で $f^{(n)}(z)$ に一様収束すること，いいかえれば，$f_\nu^{(n)}(z)$ は D において広義一様収束することがわかる．

1.7 一致の定理と解析接続

A. 領域 D において，正則な関数 $f(z)$ と $g(z)$ が恒等的に一致するための条件を考えてみよう．これは $\varphi(z)=f(z)-g(z)$ とおいてみれば，D において正則な関数がいかなる条件のもとで恒等的に0に等しくなるかということである．これに関して，つぎの定理を証明する．

定理 1.19　$\varphi(z)$ は領域 D において正則，a を D の1点とし，a に収束する D 内の点列 $z_\nu \neq a$ $(\nu=1,2,\cdots)$ の上で $\varphi(z_\nu)=0$ $(\nu=1,2,\cdots)$ ならば，$\varphi(z)$ は D において恒等的に0に等しい．

証明　定理1.17によれば，a を中心として D 内に含まれる最大の開円板 $|z-a|<d$ において，$\varphi(z)$ はテーラー展開される．

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (|z-a|<d)$$

一方，点列 $z_\nu(\nu=1,2,\cdots)$ は適当に自然数 N をとり $\nu \geqq N$ ならば，z_ν は円板 $|z-a|<d$ の内部に含まれるようにできる．ところが

$$c_0=\varphi(a)=\lim_{\nu\to\infty}\varphi(z_\nu)=0$$

いま，$k=0,1,2,\cdots,n-1$ に対して，$c_k=0$ とすると

$$c_n=\lim_{z\to a}\frac{c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots}{(z-a)^n}$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\varphi(z_\nu)}{(z_\nu-a)^n}=0$$

となるから，数学的帰納法により，すべての n に対して $c_n=0$．したがって，$\varphi(z)$ は $|z-a|<d$ において恒等的に0に等しいことがわかる．つぎに b を D の任意の点とし，a と b を D 内のなめらかな曲線 C で結ぶ．ρ を C と D の境界との距離よりも小さい正数とし，C 上の点 a_i を中心，半径 ρ の円板 $K(a_i)$：$|z-a_i|<\rho$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を図1.12のようにつくる．$K(a_i)$ は D の点ばかりからなっている．

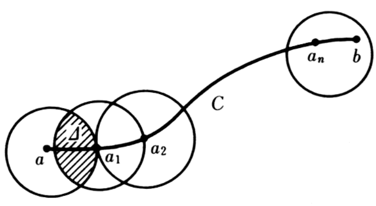


図 1.12　一致の定理

いま述べたように，$K(a)$ において $\varphi(z)\equiv 0$ である．つぎに，C 上を a から出発して最初に $K(a)$ の周囲と交わる点を a_1 とする．$K(a_1)$ において $\varphi(z)$ は正則かつ $K(a)$ と $K(a_1)$ の共通部分 Δ において $\varphi(z)\equiv 0$．しかも，a_1 は Δ の集積点である

から，$\varphi(z)$ は $K(a_1)$ において 0 である．さらに，a_1 から C に沿って b に向かうとき，$K(a_1)$ の周囲と交わる点を a_2 とすると，$K(a_2)$ において $\varphi(z)\equiv 0$．これを有限回くり返して結局，b を含む円板 $K(a_n)$ において $\varphi(z)\equiv 0$ となることが結論される．（証明終）

定理 1.19 はつぎのように表すこともできる．

> **定理 1.20**　領域 D において，2つの正則関数 $f(z)$ と $g(z)$ が，D の内部に集積点を少なくとも 1 つもつような D 内の点集合の上で同じ値をとるならば，$f(z)$ と $g(z)$ は D 全体で一致する．
>
> （**一致の定理**，unicity theorem）

B. べき級数 $P(z-a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(z-a)^\nu$ の収束半径を $\rho(a)$ としよう．$\rho(a)>0$ であるとき，$P(z,a)$ は $|z-a|<\rho(a)$ で正則な関数である．これを関数要素という．b を $|z-a|<\rho(a)$ 内の点とすると，$P(z,a)$ は b の近傍でテーラー展開 $P(z,b)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu(z-b)^\nu$ $(|z-b|<\rho(b))$ をもつ．$\rho(b)\geqq\rho(a)-|a-b|$ である．もし $\rho(b)>\rho(a)-|a-b|$ ならば，$|z-a|<\rho(a)$ と $|z-b|<\rho(b)$ の共通部分で，$P(z,a)$ と $P(z,b)$ は正則関数として恒等的に等しい（図 1.13）．

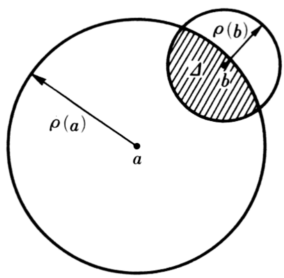


図 1.13　解析接続

そこで，$|z-a|<\rho(a)$ と $|z-b|<\rho(b)$ の合併集合 D において，複素関数 $F(z)$ を

$$F(z)=\begin{cases}P(z,a), & |z-a|<\rho(a)\\ P(z,b), & |z-b|<\rho(b)\end{cases}$$

と定義すれば，$F(z)$ は D において正則となる．$P(z,b)$ を $P(z,a)$ の**直接解析接続**という．関数要素 $P(z,a)$ から直接解析接続 $P(z,b)$ を作り，つぎに $P(z,b)$ から直接解析接続 $P(z,c)$ を作る．以下同様に直接解析接続を有限回くり返して得られる関数要素を，$P(z,a)$ の**間接解析接続**という．一般に，2つの領域 Δ および D があって $\Delta\subset D$ とし，$f(z)$ および $F(z)$ はそれぞれ Δ および D において正則であるとする．このとき，もし Δ において $f(z)=F(z)$ ならば $F(z)$ を $f(z)$ の**解析接続**（analytic continuation）であるという．また，D_1 と D_2 を 2 つの領域とし，それらの共通部分 Δ は唯一つの領域であるとする．このとき $f_1(z)$ および $f_2(z)$ がそれぞれ D_1 および D_2 で正則，かつ Δ において恒等的に $f_1(z)=f_2(z)$ が成り立つ

ならば

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1 \\ f_2(z), & z\in D_2 \end{cases}$$

とおくことにより，$F(z)$ は $D_1\cup D_2$ において正則な関数となる．$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は互いに他の解析接続であるという．

C. コーシーの積分公式と一致の定理を用い，**最大値の原理**（maximum principle）を述べておこう．

> **定理 1.21**　関数 $f(z)$ が領域 D で正則であり，定数でないとする．このとき，$|f(z)|$ は D で最大値をとらない．さらに，$f(z)$ は有界閉集合 R で連続，R の内部で正則かつ定数でないとすると，$|f(z)|$ は R の境界上の点で最大値をとる．　（**最大値の原理**，maximum principle）

証明　定理の前半を示せばよい．まず一致の定理から，$f(z)$ は D の任意の点の近傍において定数ではない．いま，$|f(z)|$ は z_0 において最大値をとると仮定して矛盾を導こう．$f(z)$ は $|z-z_0|<\varepsilon$ で正則であるとし，C を円：$|z-z_0|=\rho(\rho<\varepsilon)$ とすると，コーシーの積分公式から

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

C をパラメータ θ を用いて，$z=z_0+\rho e^{i\theta}(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と表すと

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta$$

$$\therefore\quad |f(z_0)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|d\theta$$

一方，$|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\leqq|f(z_0)|$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|d\theta\leqq|f(z_0)|$$

$$\therefore\quad |f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|d\theta$$

$$\therefore\quad \int_0^{2\pi}\{|f(z_0+\rho e^{i\theta})|-|f(z_0)|\}d\theta=0\quad(0<\rho<\varepsilon)$$

これと，$|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\leqq|f(z_0)|$ とから

$$|f(z_0+\rho e^{i\theta})|=|f(z_0)|\quad(0<\rho<\varepsilon,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

すなわち

$$|f(z)|=|f(z_0)| \quad (|z-z_0|<\varepsilon)$$

このとき，$f(z)=$定数（$|z-z_0|<\varepsilon$）となることがつぎのように示されるから矛盾である．$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする．

$|f(z)|=0$ のときは，$u^2+v^2=0$，　∴　$u=v=0$，　∴　$f(z)=0$

$|f(z)|=c\neq 0$ のときは，$u^2+v^2=c^2$，　∴　$uu_x+vv_x=0$，　$uu_y+vv_y=0$

コーシー・リーマンの方程式から $u_xu-u_yv=0$，$u_xv+u_yu=0$，$u^2+v^2=c\neq 0$ より $u_x=u_y=0$．∴ $v_x=v_y=0$．∴ $u=$定数，$v=$定数，したがって，$f(z)=$定数となる．（証明終）

1.8 ローラン展開と留数定理

A. 円領域 $|z-a|<R$ において正則な関数は，その領域内でテーラー展開 $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$ をもつ．$z=a$ で正則でない場合にはテーラーの定理は適用できないが，その代わりに $f(z)$ が円環領域 $D：0\leqq R_1<|z-a|<R_2$ において正則ならば

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

という形に一意的に展開されることを示す．これを $f(z)$ の**ローラン展開**（Laurent expansion, P. Laurent（1813－1874））という．

定理 1.22　$z=a$ を中心とし，半径 R_1 と R_2 の同心円 C_1，C_2 は正の向きをもつとする（図 1.14）．関数 $f(z)$ が C_1 上，C_2 上，および C_1 と C_2 の間の円環領域 D において正則であるとき，D の任意の点 z に対して $f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{1.65}$$

の形の無限級数に一意的に表わされる．ここで，c_n はつぎの公式で与えられる．

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad (n \gtreqless 0,\ 整数) \tag{1.66}$$

ただし，C_r は $R_1<r<R_2$ なる任意の正数 r を半径とする円：$|z-a|=r$ で，正の向きにとるものとする．

関数 $f(z)$ が a 以外では正則であるとすると，R_1 はいくらでも小さくとれる．

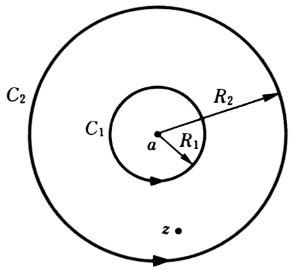


図 1.14　ローラン展開

したがって，ローラン展開 (1.65) は $0<|z-a|<R_2$ で成り立つ．また，$f(z)$ が C_2 上と C_2 の内部で正則ならば，積分 (1.66) において n が負の整数のとき，被積分関数 $f(z)(z-a)^{-n-1}$ も正則となり，積分は 0，すなわち $c_n=0$ ($n=-1, -2, \cdots$) となる．このとき，(1.65) はテーラー展開 (1.64) と一致する．

証明　定理 1.16 の $n=0$ の場合を適用すると，D の各点 z に対して

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

第1項はテーラー展開の場合と同じように

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

第2項は $\zeta\in C_1$ のとき

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)}=\frac{1}{z-a}\left\{1+\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n\right\}+\frac{\left(\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)^N}{(z-a)\left(1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)}$$

と変形する．$k=|(\zeta-a)/(z-a)|$ とおくと $k<1$．そこで

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=1}^{N}c_{-n}(z-a)^{-n}+\rho_N(z)$$

とかくと

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta,\quad \rho_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)\left(\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)^N}{(z-a)\left(1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)}d\zeta$$

である．C_1 上における $|f(\zeta)|$ の最大値を M とすると

$$|\rho_N(z)|\leqq\frac{M}{2\pi}\frac{2\pi R_1}{R_1}\frac{k^N}{1-k}=M\frac{k^N}{1-k}\to 0 \quad (N\to\infty)$$

また，n を任意の整数としたとき，$f(z)/(z-a)^{n+1}$ は $R_1<|z-a|<R_2$ において正

則であるから，定理 1.11 で $m=1$ の場合を適用することにより

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (i=1,2,\ n\gtreqless 0)$$

が得られる．つぎに，$f(z)$ が D において正則で，何らかの方法で (1.65) の形に展開されたとする：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n \quad (R_1<|z-a|<R^N \text{ で一様収束})$$

このとき，関数 $f(z)/(z-a)^{n+1}$ を C_r：$|z-a|=r(R_1<r<R_2)$ に沿って項別積分すれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=a_n \quad (n,\ \text{整数})$$

となり，$a_n=c_n$ すなわちローラン展開 (1.65) と一致することがわかる．

（証明終）

B. 関数 $f(z)$ が領域 D：$0<|z-a|<R$ において正則，しかし $z=a$ においては正則でないとき，$z=a$ を $f(z)$ の**孤立特異点** (isolated singular point) という．このとき，$f(z)$ の $0<|z-a|<R$ におけるローラン展開を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{1.67}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n\gtreqless 0,\ 0<r<R)$$

とする．右辺の第 1 項は $|z-a|<R$ で収束し，正則関数を表す．しかし，第 2 項は $(z-a)^{-1}$ のべき級数であり，特異点 $z=a$ の近傍における $f(z)$ の挙動を決定する部分であるから，これを $f(z)$ の $z=a$ におけるローラン展開の**主要部** (principal term) という．

主要部の形によって，孤立特異点はつぎのように 3 つの型に分類される．

(1)　主要部がないとき，$z=a$ を**除去可能な特異点** (removable singular point) という．

(2)　主要部が有限項から成り立つ場合，すなわち，$0<|z-a|<R$ において

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k} \quad (c_{-k}\neq 0)$$

となる場合，$z=a$ は $f(z)$ の k 位の**極** (pole) であるという．

(3)　主要部が無限級数である場合，すなわち，$0<|z-a|<R$ において

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

ならば，$z=a$ は $f(z)$ の**真性特異点**（essential singular point）であるという．

C. $z=a$ を $f(z)$ の孤立特異点とし，$0<|z-a|<R$ における $f(z)$ のローラン展開を（1.67）とする．C は $0<|z-a|<R$ の内部にある正の向きをもったジョルダン曲線とすると，例 1.9（1.59）から

$$\int_C f(z)dz=2\pi ic_{-1} \tag{1.68}$$

が成り立つ．c_{-1} は $f(z)$ のローラン展開の $1/(z-a)$ の係数である．この c_{-1} のことを，$f(z)$ の $z=a$ における**留数**（residue）といい，これを $R(a)$ で表す．一般化されたコーシー・グルザの定理（定理 1.13）からつぎの定理が得られる．

定理 1.23　C は正の向きをもつ区分的になめらかなジョルダン曲線とする．$f(z)$ は C の内部にある有限個の特異点 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を除いて正則であるとする．各特異点 a_j における留数を $R(a_j)$ とすると

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\{R(a_1)+R(a_2)+\cdots+R(a_m)\} \tag{1.69}$$

が成り立つ．　　**（留数定理）**

証明　特異点 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ のまわりに，互いに交わらず，また C の中に含まれる小さな円 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ を描く．これらにも正の向きをつけると，定理 1.13 により

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz+\cdots+\int_{C_m}f(z)dz$$
$$=2\pi i\{R(a_1)+R(a_2)+\cdots+R(a_m)\}$$

（証明終）

D. ここで留数を求める方法について述べる．$z=a$ が真性特異点の場合はローラン展開して $1/(z-a)$ の係数を求める方法しかないが，極の場合には便利な方法がある．

（1）　1位の極の場合には

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots \quad (0<|z-a|<R)$$

であるから

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \tag{1.70}$$

（2）　m 位の極の場合には

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots$$

であるから

$$c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\} \tag{1.71}$$

によって計算される.

E.　微分方程式の研究では解の無限遠点における振舞いも重要である．そこで，無限遠点 $z=\infty$ に対する特異点の分類をしておこう．$f(z)$ が $R<|z|<\infty$ $(R>0)$ において正則であるとすると，定理 1.17 において，$a=0$，$R_1=R$ とし R_2 $(>R)$ を任意にとることにより，ローラン展開

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n},\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta \quad (R<|z|<\infty, R<r)$$

が得られる．上式の右辺第 1 項を**主要部**といい，主要部が無いとき $z=\infty$ で**正則**，主要部が k 次の多項式のとき $z=\infty$ を k 位の**極**，主要部が無限級数となるとき $z=\infty$ を**真性特異点**であると定義する．また，a_{-1} の符号をかえた $-a_{-1}$ を $f(z)$ の $z=\infty$ における**留数**といい $R(\infty)$ で表す.

例 1.11

（1）

$$\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1-\left(1-\dfrac{1}{2!}z^2+\dfrac{1}{4!}z^4-\cdots\right)}{z^2}$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}z^2+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

したがって，$z=0$ は除去可能な特異点，$z=\infty$ は真性特異点で $R(\infty)=0$.

（2）

$$\frac{\sinh z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left\{z+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\right\}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}z+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

したがって，$z=0$ は 1 位の極で $R(0)=1$，$z=\infty$ は真性特異点で $R(\infty)=-1$.

（3）

$$ze^{\frac{1}{z}}=z\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right\}$$

$$=z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots \quad (0<|z|<\infty)$$

したがって，$z=0$ は真性特異点で $R_0=1/2$，$z=\infty$ は 1 位の極で $R(\infty)=-1/2$.

（4）　$\dfrac{1+2z}{z^2-z^3}=\dfrac{1+2z}{z^2(1-z)}$ は $z=0$ と 1 が特異点である.

$z=0$ の近傍では

$$=\frac{(1+2z)(1+z+z^2+\cdots)}{z^2}=\frac{1}{z^2}+3\left(\frac{1}{z}+1+z+\cdots\right)\quad(0<|z|<1)$$

$z=1$ の近傍では $t=z-1(z=t+1)$ とおけば

$$\frac{1+2z}{z^2(1-z)}=-\frac{3+2t}{t(1+t)^2}=-\frac{(3+2t)(1-2t+3t^2-\cdots)}{t}\quad(0<|t|<1)$$

$$=-\frac{3}{t}+4-5t+\cdots=-\frac{3}{z-1}+4-5(z-1)+\cdots\quad(0<|z-1|<1)$$

また，$z=\infty$ の近傍では

$$\frac{1+2z}{z^2(1-z)}=\frac{\left(2+\dfrac{1}{z}\right)}{z^2\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{3}{z^4}+\cdots\quad(1<|z|<\infty)$$

したがって，$z=0$ は2位の極で $R(0)=3$，$z=1$ は1位の極で $R(1)=-3$，また $z=\infty$ は正則点である．

例 1.12　C は原点を中心，半径2の円で正の向きとすると

$$\int_C \frac{\sinh z}{z^2}\,dz=2\pi iR(0)=2\pi i$$

$$\int_C ze^{\frac{1}{z}}\,dz=2\pi iR(0)=\pi i$$

$$\int_C \frac{1+2z}{z^2-z^3}\,dz=2\pi i\{R(0)+R(1)\}=0$$

第2章　2階線形常微分方程式

この章では複素平面上における2階線形常微分方程式の解について基本的なことがらを説明する．微分方程式の確定特異点と不確定特異点，フックス型微分方程式，超幾何微分方程式およびリーマンの P 関数などの概念を導入する．

2.1　2階線形常微分方程式の解

A. u を従属変数，z を独立変数とする **2階線形常微分方程式**（second order linear ordinary differential equation）

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{2.1}$$

を考える．$p(z)$ および $q(z)$ は複素変数 z の関数でつぎの仮定をみたしているものとする．

仮定　$p(z)$ および $q(z)$ は複素 z–平面のある領域 S において有限個の極を除いて1価正則であるとする．

定義　S において $p(z)$ および $q(z)$ がともに正則となる点を方程式 (2.1) の**正則点**（regular point），$p(z)$ と $q(z)$ の少なくとも一方が極となっている点を方程式 (2.1) の**特異点**（singular point）という．

$b\in S$ を正則点とし，$S_b=\{|z-b|<r\}$ は境界点を含めて正則点ばかりからなるとする（図 2.1）．

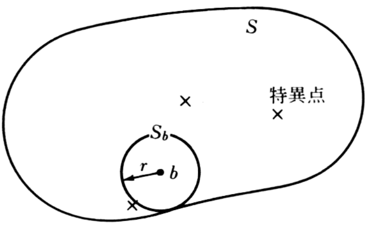


図 2.1

従属変数の変換

$$u=v\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_b^z p(\zeta)d\zeta\right\} \tag{2.2}$$

を施すと，(2.1) は標準形

$$\frac{d^2v}{dz^2}+J(z)v=0 \tag{2.3}$$

$$J(z)=q(z)-\frac{1}{2}p'(z)-\frac{1}{4}p(z)^2$$

となる．(2.1) の正則点では $J(z)$ も正則であるから，(2.3) の正則点である．したがって，S_b において (2.3) は正則である．

定理 2.1　微分方程式 (2.3) は S_b において正則な解をもつ．

証明　関数列 $\{v_n(z)\}$ をつぎのように定義する．

$$v_0(z)=a_0+a_1(z-b)\quad (a_0, a_1 \text{ は任意の複素数})$$

$$v_n(z)=\int_b^z(\zeta-z)J(\zeta)v_{n-1}(\zeta)d\zeta\quad (n=1,2,\cdots)$$

定理 1.12 から積分で定義される $v_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ は順次正則であり，また積分路は b と z を結ぶ線分としてよい．

そこで

$$M=\sup_{S_b}|J(z)|,\quad \mu=\sup_{S_b}|v_0(z)|$$

とおけば，$M<\infty$，$\mu<\infty$ である．数学的帰納法により

$$|v_n(z)|\leqq\mu\frac{M^n|z-b|^{2n}}{n!}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

であることを示す．$n=0$ の場合は明らかに正しい．$n=0,1,\cdots,m-1$ の場合に成り立つとすると，$n=m$ に対して

$$|v_m(z)|\leqq\frac{\mu}{(m-1)!}M^{m-1}\cdot M\int_b^z|\zeta-z||\zeta-b|^{2(m-1)}|d\zeta|$$

$$\leqq\frac{\mu M^m}{(m-1)!}|z-b|\int_b^z|\zeta-b|^{2(m-1)}|d\zeta|\leqq\frac{\mu M^m}{m!}|z-b|^{2m}$$

となる．$\sum_{n=0}^{\infty}\mu\frac{M^nr^{2n}}{n!}$ は収束するから，$\sum_{n=0}^{\infty}v_n(z)$ は $|z-b|<r$ において一様収束する．したがって，定理 1.18 から

$$v(z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(z)$$

は S_b において正則，かつ

$$\frac{dv_n(z)}{dz}=-\int_b^zJ(\zeta)v_{n-1}(\zeta)d\zeta,\quad \frac{d^2v_n(z)}{dz^2}=-J(z)v_{n-1}(z)$$

$$\therefore\quad \frac{d^2v(z)}{dz^2}=-J(z)v(z)$$

すなわち，$v(z)$ は S_b において正則な (2.3) の解である．また，$v(z)$ は

$$v(b)=a_0,\quad v'(b)=a_1 \tag{2.4}$$

をみたす．(2.4) を**初期条件** (initial condition) という．（証明終）

> **定理 2.2**　初期条件 (2.4) をみたし，微分方程式 (2.3) の正則な解は，ただ 1 つである．

証明　(2.4) をみたし，(2.3) の正則な解が 2 つあったとし，それらを $v_1(z)$，および $v_2(z)$ とする．$w(z)=v_1(z)-v_2(z)$ とおくと

$$\frac{d^2w}{dz^2}+J(z)w=0$$

となる．

両辺を $n-2$ 回微分して $z=b$ とおく．ライプニッツの公式を用いると

$$w^{(n)}(b)+J(b)w^{(n-2)}(b)+{}_{n-2}C_1J'(b)w^{(n-3)}(b)+\cdots+J^{(n-2)}(b)w(b)=0$$

$w(b)=w'(b)=0$ と，$n=2,3,\cdots$ とおけば，逐次 $w''(b)=w^{(3)}(b)=\cdots=0$ をみたす．したがって，正則関数 $w(z)$ は $z=b$ におけるテーラー展開の係数がすべて 0 ということになり，$w(z)\equiv 0$ でなければならない．すなわち，$v_1(z)=v_2(z)$ である．（証明終）

ここで変換 (2.2) から

$$u(z)=v(z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_b^z p(\zeta)d\zeta\right\}$$

をつくると，$u(z)$ は S_b において微分方程式 (2.1) の正則な解で，初期条件

$$u(b)=a_0$$

$$u'(b)=a_1-\frac{1}{2}p(b)a_0 \tag{2.5}$$

をみたし，この初期条件のもとで一意的である．

このようにして $z=b$ の近傍 S_b で得られた微分方程式 (2.1) の正則な解は，解析接続の一般論（§1.7 B）を用いて，S の特異点を除く全ての点に (2.1) の正則な解として解析接続される（図 2.2)．

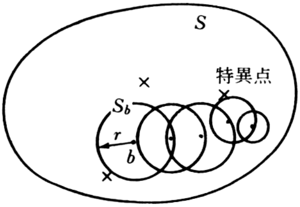


図 2.2

B. $u_1(z)$ と $u_2(z)$ が (2.1) の解であるとき，線形結合 $c_1u_1(z)+c_2u_2(z)$ も (2.1) の解となる．$c_1u_1(z)+c_2u_2(z)=0$ となるのは $c_1=c_2=$

0のときに限る場合，$u_1(z)$ と $u_2(z)$ は**線形独立** (linearly independent) であるといい，線形独立でないとき**線形従属** (linearly dependent) であるという．$u(z)=0$ も (2.1) の解であり，これを自明な解という．

$u_1(z)$ と $u_2(z)$ に対して，行列式

$$W[u_1, u_2](z)=\begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix}$$

を $u_1(z)$ と $u_2(z)$ の**ロンスキーの行列式** (Wronskian) という．

> **定理 2.3**　微分方程式 (2.1) の係数 $p(z)$, $q(z)$ は領域 D において正則とする．$u_1(z)$ と $u_2(z)$ を (2.1) の2つの解とすると
>
> (1)　$u_1(z)$ と $u_2(z)$ が線形従属ならば，D において　$W[u_1, u_2](z)=0$
>
> (2)　$u_1(z)$ と $u_2(z)$ が線形独立ならば，D において　$W[u_1, u_2](z)\neq 0$

証明　u_1 と u_2 を線形従属とし，$c_1u_1(z)+c_2u_2(z)=0$, $(c_1, c_2)\neq(0, 0)$ とおく．微分して $c_1u_1'(z)+c_2u_2'(z)=0$. 任意の $z_0\in D$ に対して連立方程式

$$t_1u_1(z_0)+t_2u_2(z_0)=0, \quad t_1u_1'(z_0)+t_2u_2'(z_0)=0 \tag{2.6}$$

は $(t_1, t_2)=(c_1, c_2)\neq(0, 0)$ なる解をもつから，その係数行列の行列式は0，すなわち $W[u_1, u_2](z_0)=0$. z_0 は任意であるから $W[u_1, u_2](z)=0$.

逆にある点 $z_0\in D$ で $W[u_1, u_2](z_0)=0$ とすると，t_1, t_2 の連立方程式 (2.6) は $(t_1, t_2)\neq(0, 0)$ をみたす解を少なくとも1組もつ．それを (c_1, c_2) とすると，$u(z)=c_1u_1(z)+c_2u_2(z)$ は (2.1) の解で $u(z_0)=u'(z_0)=0$ をみたす．解の一意性から $u(z)$ は自明な解 $u(z)=0$ に一致する．　　(証明終)

> **定理 2.4**　微分方程式 (2.1) は線形独立な解 $u_1(z)$, $u_2(z)$ をもつ．(2.1) のすべての解は $u_1(z)$ と $u_2(z)$ の線形結合として一意的に表される．

この定理から (2.1) の解全体は2次元の線形空間をなすことがわかる．この線形空間の基底，すなわち線形独立な1組の解 $u_1(z)$, $u_2(z)$ を (2.1) の**基本解** (fundamental system of solutions) とよぶ．また，$u_1(z)$ と $u_2(z)$ を1組の基本解とし，c_1 と c_2 を任意定数とするとき，$u(z)=c_1u_1(z)+c_2u_2(z)$ を (2.1) の**一般解**という．

証明　1点 $z_0\in D$ をとる．(2.1) の解 $u_1(z)$ および $u_2(z)$ をそれぞれ初期条件

$u_1(z_0)=1$, $u_1'(z_0)=0$, $u_2(z_0)=0$, $u_2'(z_0)=1$ をみたすものをとる．$W[u_1, u_2](z_0)=1$ であるから，定理2.3から $u_1(z)$, $u_2(z)$ は線形独立である．つぎに（2.1）の任意の解を $u_3(z)$ とし $u_3(z_0)=c_1$, $u_3'(z_0)=c_2$ とする．$u(z)=c_1u_1(z)+c_2u_2(z)-u_3(z)$ とおくと，$u(z)$ も（2.1）の解で $u(z_0)=u'(z_0)=0$ を満たす．解の一意性から $u(z)=0$ でなければならない．したがって，$u_3(z)=c_1u_1(z)+c_2u_2(z)$ である．（証明終）

2.2 確定特異点

A. 微分方程式（2.1）と正則点における初期条件（2.5）を与えれば，解は一意的に存在し，特異点を除くすべての点へ正則な解として解析接続される．では特異点の近傍における解の様相は与えられた微分方程式によってどのように特徴づけられるかを考察しよう．まず，特異点の分類を定義する．

定義 複素 z–平面の領域に含まれる点 c において，$p(z)$ または $q(z)$ の少なくとも一方が極であるとする．

（1） $p(z)$ は $z=c$ で高々1位の極，また $q(z)$ は $z=c$ で高々2位の極であるとき，$z=c$ を（2.1）の**確定特異点**（regular singular point）という．

（2） $p(z)$ と $q(z)$ の少なくとも一方が（1）を満たさないとき，$z=c$ を（2.1）の**不確定特異点**（irregular singular point）という．

$z=c$ を確定特異点とし，c の近傍において（2.1）の解を構成しよう．$S_c=\{|z-c|\leq r\}$ は $z=c$ 以外には特異点を含まないものとする．

ここで

$$p(z)=\frac{P(z)}{z-c},\quad q(z)=\frac{Q(z)}{(z-c)^2}$$

とおけば，（2.1）は

$$(z-c)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(z-c)P(z)\frac{du}{dz}+Q(z)u=0 \tag{2.7}$$

となり，$P(z)$ および $Q(z)$ は S_c においてテーラー展開可能である：

$$\begin{aligned} &P(z)=p_0+p_1(z-c)+p_2(z-c)^2+\cdots \quad (p_0, p_1, p_2, \cdots \text{は定数}) \\ &Q(z)=q_0+q_1(z-c)+q_2(z-c)^2+\cdots \quad (q_0, q_1, q_2, \cdots \text{は定数}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

（2.7）の解をつぎの無限級数の形で求めよう．

$$u(z)=(z-c)^\rho\{a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\},\quad a_0=1 \tag{2.9}$$

$\rho, a_1, a_2, \cdots$ は定数で無限級数が微分方程式をみたすように，いわゆる未定係数法によって求められる．(2.9) を (2.7) に代入すると

$$(z-c)^{\rho}\{\rho(\rho-1)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(n+\rho)(n+\rho-1)(z-c)^n\}$$

$$+(z-c)^{\rho}P(z)\{\rho+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(n+\rho)(z-c)^n\}$$

$$+(z-c)^{\rho}Q(z)\{1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\}=0$$

となる．ここで，$P(z)$ と $Q(z)$ をテーラー展開 (2.8) でおきかえ，$(z-c)$ のべきにそろえると $(z-c)^{\rho+n}$ の係数は

$$(z-c)^{\rho}\ \text{の係数}=\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0 \tag{2.10}$$

$$(z-c)^{\rho+1}\ \text{の係数}=a_1\{(\rho+1)\rho+p_0(\rho+1)+q_0\}+\rho p_1+q_1$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}(z-c)^{\rho+n}\ \text{の係数}=&a_n\{(\rho+n)(\rho+n-1)+p_0(\rho+n)+q_0\}\\&+\sum_{m=1}^{\infty}a_{n-m}\{(\rho+n-m)p_m+q_m\}\quad(a_0=1)\end{aligned} \tag{2.11}$$

と計算されるが，これらの係数がすべて 0 となるように $\rho, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ が求まれば，無限級数 (2.9) は形式的に微分方程式 (2.7) をみたすことになり，これを**形式解** (formal solution) という．

まず，α を決める方程式として

$$F(\rho)=\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0 \tag{2.12}$$

を得る．この 2 次方程式を微分方程式 (2.1)（または (2.7)）の確定特異点 c における**決定方程式** (indicial equation)，あるいは**特性方程式** (characteristic equation) という．またこの根 ρ_1，ρ_2 を**特性根** (characteristic exponents) という．

ρ を特性根の 1 つとすると，その ρ に対して $(z-c)^{\rho+n}$ の係数が 0 となるためには，(2.10)，(2.11) から

$$a_1=-\frac{1}{F(\rho+1)}[(\rho p_1+q_1)], \cdots,$$

$$a_n=-\frac{1}{F(\rho+n)}\left[\sum_{m=1}^{n}a_{n-m}\{(\rho+n-m)p_m+q_m\}\right]\quad(a_0=1) \tag{2.13}$$

ととればよい．いますべての n に対して $F(\rho+n)\neq 0$ ならば，a_n は逐次計算でき形式解が得られる．

そこで ρ_1 と ρ_2 を 2 つの特性根とし，$\mathrm{Re}\,\rho_1 \geqq \mathrm{Re}\,\rho_2$ であるとする．このとき

根 $(\rho_1+n)\neq 0\,(n=1,2,\cdots)$ で，1つの形式解

$$(z-c)^{\rho_1}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right\} \tag{2.14}$$

が得られる．つぎに ρ_2 に対しては $\rho_1-\rho_2\neq 0,1,2,\cdots$ ならば，$F(\rho_2+n)\neq 0$ であるから，もう1つの形式解

$$(z-c)^{\rho_2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(z-c)^n\right\} \tag{2.15}$$

が得られる．

定理 2.5 微分方程式 (2.7) の確定特異点 $z=c$ における特性根を ρ_1，ρ_2 とし，$\mathrm{Re}\,\rho_1\geqq\mathrm{Re}\,\rho_2$，$\rho_1-\rho_2\neq 0,1,2,\cdots$ をみたすとする．このとき，$z=c$ の近傍において

$$\begin{aligned} u_1(z)&=(z-c)^{\rho_1}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right\}\\ u_2(z)&=(z-c)^{\rho_2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(z-c)^n\right\}\end{aligned} \tag{2.16}$$

とかける基本解が存在する．

証明 形式解の無限級数が収束することをいえばよい．そのために，$P(z)$ および $Q(z)$ のテーラー展開 (2.8) の係数に関するコーシーの係数評価式を導いておこう．定理1.17を適用すれば，p_n は

$$p_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{P(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

とかくことができる．円 $|z-c|=r$ の上で $|P(z)|\leqq M$ ならば

$$|p_n|\leqq\frac{M\,2\pi r}{2\pi r^{n+1}}=\frac{M}{r^n} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

同様に

$$|q_n|\leqq\frac{M}{r^n}$$

が成り立つ．これを**コーシーの係数評価式**という．

さて

$$\begin{aligned} F(\rho_i+n)&=(\rho_i+n)(\rho_i+n-1)+p_0(\rho_i+n)+q_0\\ &=n^2+(2\rho_i-1)n+p_0n+F(\rho_i)\\ &=n\{n+2\rho_i+p_0-1\} \quad (i=1,2)\end{aligned}$$

ところが，$\rho_1+\rho_2=1-p_0$ であるから，$2\rho_1+p_0-1=\rho_1-\rho_2$，$2\rho_2+p_0-1=\rho_2-\rho_1$ とかける．$\rho_1-\rho_2=s$ とおくと

$$F(\rho_1+n)=n(n+s),\quad F(\rho_2+n)=n(n-s)$$

仮定から $\mathrm{Re}\, s \geqq 0, s \neq 0, -1, -2, \cdots$．したがって，$n=1, 2, \cdots$ に対して

$$|F(\rho_1+n)|>n^2,\quad |F(\rho_2+n)|>n^2\kappa$$

をみたす．ここで，κ は適当な正数である．また，コーシーの係数評価式から S_c において

$$|p_n|<\frac{M}{r^n},\quad |q_n|<\frac{M}{r^n},\quad |\rho_i p_n+q_n|<\frac{M}{r^n}\quad (i=1, 2, M>1)$$

をみたす正数 M をとることができる．

そこで数学的帰納法により，すべての $n \geqq 1$ に対して不等式

$$|a_n| \leqq \frac{M^n}{r^n},\quad |a_n'| \leqq \frac{M^n\kappa^n}{r^n}$$

がみたされることを示そう．

$$a_n=-\frac{1}{F(\rho_1+n)}\left[\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\{(\rho_1+n-m)p_m+q_m\}\right]$$

から，まず

$$|a_1|=\left|\frac{\rho_1 p_1+q_1}{F(\rho_1+1)}\right|<\frac{M}{r}$$

$|a_m|<\dfrac{M^m}{r^m}$　$(m \leqq n-1)$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left|\frac{\sum_{m=1}^{n} a_{n-m}\{(\rho_1+n-m)p_m+q_m\}}{F(\rho_1+n)}\right| \\
&\leqq \frac{\sum_{m=1}^{n}|a_{n-m}(\rho_1 p_m+q_m)|+\sum_{m=1}^{n}|a_{n-m}(n-m)p_m|}{|F(\rho_1+n)|} \\
&\leqq \frac{1}{n^2}\left\{n\frac{M^n}{r^n}+\sum_{m=1}^{n}(n-m)\frac{M^n}{r^n}\right\} \leqq \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\frac{M^n}{r^n} \leqq \frac{M^n}{r^n}
\end{aligned}$$

同様に $|a_n'| \leqq \dfrac{M^n\kappa^n}{r^n}$ も示される．よって，形式解 (2.14) および (2.15) はそれぞれ $|z-c|<\dfrac{r}{M}$，$|z-c|<\dfrac{r}{M\kappa}$ において収束し，(2.7) の解となる．

（証明終）

B. 定理 2.5 の仮定がみたされない場合，すなわち $s=\rho_1-\rho_2=0, 1, 2, \cdots$ である

場合には $F(\rho_1+n)\neq 0$ であるから 1 つの解 $u_1(z)$ を求めることはできる．そこでもう 1 つの解を求めておく．

$$u=u_1(z)w$$

とおき，(2.7) に代入すると

$$(z-c)^2\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{2(z-c)^2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}+(z-c)P(z)\right\}\frac{dw}{dz}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2w}{dz^2}+\left\{2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}+\frac{P(z)}{z-c}\right\}\frac{dw}{dz}=0$$

この微分方程式の一般解は A と B を任意定数として

$$w(z)=A+B\int^z\frac{1}{\{u_1(t)\}^2}\left\{\exp\int^t-\frac{P(\tau)}{\tau-c}\,d\tau\right\}dt$$

で与えられる．ここで $u_1(z)$ に級数 (2.14) を，また $P(z)$ にそのテーラー展開を代入し

$$w(z)=A+B\int^z\frac{1}{(t-c)^{2\rho_1}\{1+a_1(t-c)+\cdots\}^2}\left\{\exp\int^t-\frac{p_0+p_1(\tau-c)+\cdots}{\tau-c}\,d\tau\right\}dt$$

$$=A+B\int^z(t-c)^{-p_0-2\rho_1}g(t)dt$$

とおくと，$g(z)$ は $z=c$ の近傍において正則，かつテーラー展開

$$g(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(z-c)^n$$

をもつことがわかる．また，$2\rho_1+p_0=\rho_1-\rho_2+1=s+1$ $(s=\rho_1-\rho_2)$ より

$$\begin{aligned}w(z)&=A+B\int^z g(t)(t-c)^{-(s+1)}dt\\&=A+B(z-c)^{-s}\left\{-\frac{1}{s}-\sum_{n=1}^{s-1}\frac{g_n}{s-n}(z-c)^n\right.\\&\qquad\left.+g_s(z-c)^s\log(z-c)+\sum_{n=s+1}^{\infty}\frac{g_n}{n-s}(z-c)^n\right\}\quad(s>0)\\&=A+B\left\{\log(z-c)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n}(z-c)^n\right\}\quad(s=0)\end{aligned}$$

とかくことができる．したがって，$u_1(z)$ と線形独立なもう 1 つの解として，つぎの形のものが存在する．

$$u_2(z)=\begin{cases}Au_1(z)+Bg_su_1(z)\log(z-c)+B(z-c)^{\rho_2}\left\{-\dfrac{1}{s}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n\right\} & (s>0)\\[2ex] Au_1(z)+Bu_1(z)\log(z-c)+B(z-c)^{\rho_2}\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n\right\} & (s=0)\end{cases}$$

$u_2(z)$ は実際の計算では，つぎの形の級数を想定して未定係数法により求めるのが便利である.

$$u_2(z)=u_1(z)\log(z-c)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^{\rho_2+n} \tag{2.17}$$

例 2.1　微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-m^2u=0 \tag{2.18}$$

は $z=0$ を確定特異点としてもち，決定方程式は

$$F(\alpha)=\rho(\rho-1)+\rho=0$$

である．特性根は $\rho=0$（重根）であるから，形式解として

$$u_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \quad (a_0=1)$$

$$u_2(z)=u_1(z)\log z+\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$$

を想定して，a_n および b_n を求める.

まず，$u_1(z)$ を方程式に代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2a_nz^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}m^2a_nz^n=0$$

z^{-1} の係数$=0$ とおいて $a_1=0$，z^n の係数$=0(n=0,1,2,\cdots)$ から

$$(n+2)^2a_{n+2}-m^2a_n=0$$

したがって，$n=2k$（偶数）のとき

$$a_{2k+2}=\left(\frac{m}{2k+2}\right)^2a_{2k}=\frac{m^2}{(2k+2)^2}\frac{m^2}{(2k)^2}a_{2(k-1)}=\cdots$$

$$=\frac{m^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}\{(k+1)!\}^2}$$

n が奇数のときは $a_n=0$．よって

$$u_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n} \tag{2.19}$$

が得られた．つぎに $u_2(z)$ を定義する b_n も未定係数法により

$$\frac{2}{z}\frac{du_1}{dz}+\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)^2b_{n+2}-m^2b_n\}z^n+\frac{b_1}{z}=0$$

$u_1(z)$ はすでに求まっているので (2.19) を代入し，z のべきに整頓したのち z^n の係数を 0 とおくことにより

$n=2k+1$ のとき　$b_{2k+1}=0$　$(k=1, 2, \cdots)$

$n=2k$ のとき　$b_0=0$

$$b_{2k+2}=\frac{m^2}{2^2(k+1)^2}b_{2k}-\frac{1}{k+1}\frac{m^{2(k+1)}}{2^{2(k+1)}\{(k+1)!\}^2}\quad(k=0, 1, 2, \cdots)$$

を得る．ここで，$b_{2k}=\dfrac{m^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}B_{2k}$ とおくと

$$B_{2k+2}=B_{2k}-\frac{1}{k+1}\quad(B_0=0)$$

$$\therefore\quad B_{2k}=-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

となる．以上のことから結局

$$b_{2n}=-\frac{m^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right),\quad b_{2n+1}=0\quad(n=0, 1, 2, \cdots)$$

が得られる．したがって

$$u_2(z)=u_1(z)\log z-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{m^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right\}z^{2n}\tag{2.20}$$

$u_1(z)$ および $u_2(z)$ の収束半径は∞である．したがって，$u_1(z)$ は $|z|<\infty$ において正則，$u_2(z)$ は $0<|z|<\infty$ において正則な解である．

C. さて，微分方程式の解は$|z|$が無限に大きくなるときどのように振舞うかということは興味のあることである．そこで，$z=\infty$も有限な点と同等に取扱う方が合理的である．すなわち，微分方程式 (2.1) に変換$z=1/\xi$を施せば

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left\{\frac{2}{\xi}-\frac{1}{\xi^2}p\left(\frac{1}{\xi}\right)\right\}\frac{du}{d\xi}+\frac{1}{\xi^4}q\left(\frac{1}{\xi}\right)u=0\tag{2.21}$$

となる．そこで，つぎのように定義する．

定義　$z=\infty$が微分方程式 (2.1) の正則点，確定特異点または不確定特異点であるとは，微分方程式 (2.21) において$\xi=0$ が正則点，確定特異点，または不確定特異点となることをいう．

この定義から$z=\infty$が確定特異点であるためには，$p(z)$ および $q(z)$ の $z=\infty$におけるローラン展開は

$$p(z)=\frac{p_1}{z}+\frac{p_2}{z^2}+\cdots\quad(p_1, p_2, \cdots \text{は定数})$$

$$q(z)=\frac{q_2}{z^2}+\frac{q_3}{z^3}+\cdots\quad(q_2, q_3, \cdots \text{は定数})$$

とかけることが必要十分条件である．このとき，$z=\infty$における決定方程式は，(2.21) の$\xi=0$における決定方程式で

$$F(\alpha)=\rho(\rho-1)+(2-p_1)\rho+q_2$$
$$=\rho^2+(1-p_1)\rho+q_2=0$$

である．また，$z=\infty$が正則点となるためには

$$p(z)=\frac{2}{z}+\frac{p_2}{z^2}+\cdots$$

$$q(z)=\frac{q_4}{z^4}+\cdots$$

でなければならない．

2.3　フックス型微分方程式

定義　微分方程式 (2.1)

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{2.1}$$

の係数$p(z)$ および$q(z)$ は，z-平面において有限個の極$a_1, a_2, \cdots, a_n$を除いて1価正則であるとする．このとき，$z=\infty$も含めてすべての特異点が確定特異点ならば，(2.1) は**フックス型微分方程式** (differential equation of Fuchsian type, I. L. Fuchs (1833 - 1902)) であるといわれる．

つぎの定理が成り立つ．

定理 2.6　微分方程式 (2.1) が$a_1, a_2, \cdots, a_n$および∞を確定特異点とするフックス型微分方程式であるための必要十分条件は

$$p(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k}\quad (A_k \text{ は定数}) \tag{2.22}$$

$$q(z)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{B_k}{(z-a_k)^2}+\frac{C_k}{z-a_k}\right),\quad \sum_{k=1}^{n}C_k=0\quad (B_k, C_k \text{ は定数}) \tag{2.23}$$

とかけることである．

証明　$p(z)$ は$z=a_k(k=1, 2, \cdots, n)$ において高々1位の極，また，$q(z)$ は高々2位の極であるから

$$p(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k}+p_1(z)\quad (A_k\ \text{は定数})$$

$$q(z)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{B_k}{(z-a_k)^2}+\frac{C_k}{z-a_k}\right)+q_1(z)\quad (B_k, C_k\ \text{は定数})$$

とかくことができ，ここで $p_1(z)$ および $q_1(z)$ は整関数でなければならない．また，$z=\infty$ が確定特異点であるためには，$p(z)$ および $q(z)$ の $z=\infty$ におけるローラン展開がそれぞれ $1/z$，および $1/z^2$ の項から始まることが必要十分条件であったから

$$p_1(z)=0$$

$$q_1(z)=0,\quad \sum_{k=1}^{n}C_k=0$$

となる．したがって，微分方程式はつぎのようにかくことができる．

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-a_k}\right\}\frac{du}{dz}+\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{B_k}{(z-a_k)^2}+\frac{C_k}{z-a_k}\right)\right\}u=0 \tag{2.24}$$

ただし

$$\sum_{k=1}^{n}C_k=0$$

（証明終）

ここで，それぞれの確定特異点における決定方程式を求めると

$$z=a_k\qquad \rho(\rho-1)+A_k\rho+B_k=0\quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{2.25}$$

$$z=\infty\qquad \rho(\rho-1)+\left(2-\sum_{k=1}^{n}A_k\right)\rho+\sum_{k=1}^{n}(B_k+a_kC_k)=0 \tag{2.26}$$

である．いま，$z=a_k$ における特性根を $\rho_1{}^{(k)}$，$\rho_2{}^{(k)} (k=1, 2, \cdots, n)$，$z=\infty$ における特性根を $\rho_1{}^{(\infty)}, \rho_2{}^{(\infty)}$ とかけば 2 次方程式の根と係数の関係から

$$\rho_1{}^{(k)}+\rho_2{}^{(k)}=1-A_k\quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

$$\rho_1{}^{(\infty)}+\rho_2{}^{(\infty)}=\sum_{k=1}^{n}A_k-1$$

が成り立つ．したがって

$$\sum_{k=1}^{n}(\rho_1{}^{(k)}+\rho_2{}^{(k)})+\rho_1{}^{(\infty)}+\rho_2{}^{(\infty)}=n-1 \tag{2.27}$$

を得る．(2.27) を**フックスの関係式**という．なお，ここからは，フックス型微分方程式の特異点の集合を $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \infty\}$ などとかくことにする．

注意　確定特異点 $z=a_k (k=1, 2, \cdots, n)$ および $z=\infty$ における特性根をフックスの関係式をみたすように与えたとき，微分方程式 (2.24) は一意的に決定でき

るかどうかを考えよう. (2.25) から2次方程式の根と係数の関係を用いれば, A_k と B_k は定められる. $C_1, C_2, \cdots, C_n$ については2つの関係式, $\sum_{k=1}^{n} C_k=0$ および (2.26) から得られる $\sum_{k=1}^{n}(B_k+a_kC_k)=\rho_1{}^{(\infty)}\cdot\rho_2{}^{(\infty)}$ しかないので, $n-2$ 個の任意定数が残ることになる. この任意定数を**アクセサリー　パラメータ** (accessory parameter) とよぶ. $n=2$ の場合, すなわち $\{a_1, a_2, \infty\}$ を確定特異点とするフックス型微分方程式は, それぞれの特異点における特性根を与えると微分方程式の係数, A_k, B_k, $C_k(k=1,2)$ はすべて一意的に定まる.

例 2.2　$\{a, \infty\}$ を確定特異点とするフックス型微分方程式は

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{A}{z-a}\frac{du}{dz}+\frac{B}{(z-a)^2}u=0 \quad (A, B \text{ は定数})$$

であり, $z=a$ における決定方程式

$$\rho(\rho-1)+A\rho+B=0$$

の根を ρ_1, ρ_2 とすると基本解は

$$u_1(z)=(z-a)^{\rho_1}, \quad u_2(z)=(z-a)^{\rho_2} \quad (\rho_1\neq\rho_2)$$
$$u_1(z)=(z-a)^{\rho_1}, \quad u_2(z)=(z-a)^{\rho_1}\log(z-a) \quad (\rho_1\neq\rho_2)$$

となる. また $\{a_1, a_2\}$ を確定特異点とし, a_1, a_2 における特性根をそれぞれ $(\rho_1{}^{(1)}, \rho_2{}^{(1)})$, $(\rho_1{}^{(2)}, \rho_2{}^{(2)})$ とすると, フックス型微分方程式は $\rho_1{}^{(2)}=-\rho_1{}^{(1)}$, $\rho_2{}^{(2)}=-\rho_2{}^{(1)}$ をみたし, かつ微分方程式および基本解はつぎのようにかかれる.

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-(\rho_1{}^{(1)}+\rho_2{}^{(1)})}{z-a_1}+\frac{1+(\rho_1{}^{(1)}+\rho_2{}^{(1)})}{z-a_2}\right\}\frac{du}{dz}+\frac{(a_1-a_2)^2\rho_1{}^{(1)}\rho_2{}^{(1)}}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2}u=0$$

$$u_1=\left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\rho_1{}^{(1)}}, \quad u_2=\left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\rho_2{}^{(1)}} \quad (\rho_1{}^{(1)}\neq\rho_2{}^{(1)})$$

$$u_1=\left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\rho_1{}^{(1)}}, \quad u_2=\left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\rho_1{}^{(1)}}\log\frac{z-a_1}{z-a_2} \quad (\rho_1{}^{(1)}=\rho_2{}^{(1)})$$

2.4　特異点3つのフックス型微分方程式

A. 有限な3点 $\{a_1, a_2, a_3\}$ を確定特異点とするフックス型微分方程式は

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{A_1}{z-a_1}+\frac{A_2}{z-a_2}+\frac{A_3}{z-a_3}\right\}\frac{du}{dz}$$
$$+\left\{\frac{B_1}{(z-a_1)^2}+\frac{B_2}{(z-a_2)^2}+\frac{B_3}{(z-a_3)^2}+\frac{C_1}{z-a_1}+\frac{C_2}{z-a_2}+\frac{C_3}{z-a_3}\right\}u=0$$

とかくことができる. また, $z=\infty$ は方程式の正則点であるとすると, 2.2節の終

りに述べたことから

$$\sum_{k=1}^{3} A_k = 2, \quad \sum_{k=1}^{3} C_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3} (B_k + a_k C_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} (2a_k B_k + a_k{}^2 C_k) = 0$$

をみたさなければならない．特異点 a_1, a_2, a_3 における特性根の組をそれぞれ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\{\beta_1, \beta_2\}$, $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ $(\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1)$ とすると，上の関係式と決定方程式の根と係数の関係式から，A_k, B_k, $C_k (k=1, 2, 3)$ は一意的に求まる．計算結果を整理しておけば

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{ \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-a_1} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-a_2} + \frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-a_3} \right\} \frac{du}{dz}$$
$$+ \left\{ \frac{\alpha_1\alpha_2(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{z-a_1} + \frac{\beta_1\beta_2(a_2-a_1)(a_2-a_3)}{z-a_2} \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma_1\gamma_2(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{z-a_3} \right\} \frac{u}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} = 0 \qquad (2.28)$$

となる．

微分方程式 (2.28) の一般解は**リーマンの P 関数** (P-function of Riemann) とよばれる記号で表される，すなわち

$$u = P\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} \qquad (2.29)$$

とかかれる．ここで，第1行は特異点を表し，第2行と第3行にはそれぞれの特異点における特性根をかく．また右端の文字は独立変数である．リーマンの P 関数を与えることは微分方程式 (2.28) を定義することでもある．

B. ここで3つの確定特異点をもつフックス型微分方程式の標準形，すなわち超幾何微分方程式を導くことにしよう．そのために，つぎの補題を証明する．

補題 2.1　1次分数変換

$$z = \frac{aw+b}{cw+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

は確定特異点を確定特異点にうつし，対応する特異点における特性根は不変である．

証明　$c \neq 0$ とすると1次分数変換は

$$z=\frac{aw+b}{cw+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{cw+d}$$

とかき直してみれば，つぎの3つの変換に分解されることがわかる．

（ｉ）　$z=hs+k \quad \left(h=b-\dfrac{ad}{c},\ k=\dfrac{a}{c}\right)$

（ii）　$s=\dfrac{1}{t}$，　（iii）　$t=cw+d$

（ｉ）と（iii）は同じ形の1次変換であるから結局，（ｉ）$z=hs+k$ と（ii）$z=1/s$ について補題が成り立つことを示せばよい．

（ｉ）　$z=z_0$ を与えられた微分方程式の確定特異点とする．したがって，微分方程式は

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{P(z)}{z-z_0}\frac{du}{dz}+\frac{Q(z)}{(z-z_0)^2}u=0 \quad (P(z), Q(z) \text{ は } z=z_0 \text{ で正則}) \tag{2.30}$$

とかけ，$z=z_0$ における決定方程式は

$$\alpha(\alpha-1)+P(z_0)\alpha+Q(z_0)=0 \tag{2.31}$$

である．いま，$z=hs+k$ と変換すると，$z=z_0$ は $s=(z_0-k)/h$ にうつり，(2.30) は

$$\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{hP(hs+k)}{hs+k-z_0}\frac{du}{ds}+\frac{h^2Q(hs+k)}{(hs+k-z_0)^2}u=0$$

となる．$s=(z_0-k)/h$ は確定特異点となっており，$s=(z_0-k)/h$ における決定方程式は (2.31) と同じである．

つぎに $z=\infty$ が確定特異点であるとしよう．もとの微分方程式を

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{2.1}$$

とすると，$p(z)$ と $q(z)$ の $z=\infty$ におけるローラン展開は

$$p(z)=\frac{p_1}{z}+\cdots, \quad q(z)=\frac{q_2}{z^2}+\cdots$$

とかかれる．変換 $z=hs+k$ により $z=\infty$ は $s=\infty$ にうつり，(2.1) は

$$\frac{d^2u}{ds^2}+hp(hs+k)\frac{du}{ds}+h^2q(hs+k)u=0$$

と変形されるが，$s=\infty$において

$$hp(hs+k)=\frac{p_1}{s}+\cdots,\quad h^2q(hs+k)=\frac{q_2}{s^2}+\cdots$$

であるから，$s=\infty$も確定特異点であり，決定方程式は不変で

$$\rho(\rho-1)+(2-p_1)\rho+q_2=0$$

となる．

（ii）$z=1/s$ についても同じように証明される．（証明終）

いま，与えられた微分方程式は $\{a,b,c\}$ を確定特異点とするフックス型微分方程式であるとする．このとき変換

$$z=c+\frac{1}{s}\ \text{により特異点は}\ \left\{\frac{1}{a-c},\frac{1}{b-c},\infty\right\}$$

にうつり，さらに変換

$$t=\frac{s-\dfrac{1}{a-c}}{\dfrac{1}{b-c}-\dfrac{1}{a-c}}\ \text{により}\ \{0,1,\infty\}$$

にうつる．$\{0,1,\infty\}$ を確定特異点とするフックス型微分方程式は，独立変数を z とかけば

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}\right\}\frac{du}{dz}+\left\{\frac{B_1}{z^2}+\frac{B_2}{(z-1)^2}+\frac{C}{z}-\frac{C}{z-1}\right\}u=0$$

$$(A_1,A_2,B_1,B_2,C\ \text{は定数})$$

と表される．また，$z=0,1,\infty$ における特性根の組をそれぞれ $\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$\{\beta_1,\beta_2\}$，$\{\gamma_1,\gamma_2\}$（$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1$）とすると，微分方程式は

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-1}\right\}\frac{du}{dz}$$
$$+\left\{\frac{\alpha_1\alpha_2}{z^2}+\frac{\beta_1\beta_2}{(z-1)^2}+\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{z(z-1)}\right\}u=0 \qquad (2.32)$$

となる．(2.32) の一般解はリーマンの P 関数を用いると

$$u=P\left\{\begin{matrix}0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, & z\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{matrix}\right\} \qquad (2.33)$$

のように表される．

u の方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{2.1}$$

に変換

$$u=z^{\lambda}w \quad (\lambda=\alpha_1 \text{ または } \alpha_2) \tag{2.34}$$

を施すと，w がみたす方程式は

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{\frac{2\lambda}{z}+p(z)\right\}\frac{dw}{dz}+\left\{\frac{\lambda(\lambda-1)}{z^2}+\frac{\lambda p(z)}{z}+q(z)\right\}u=0 \tag{2.35}$$

となる．したがって，もし (2.1) が $\{0,1,\infty\}$ を確定特異点としてもてば，(2.35) も $\{0,1,\infty\}$ を確定特異点としてもつ．決定方程式はどのような変換をうけるかを調べよう．$p(z)$ と $q(z)$ の $z=0,1,\infty$ におけるローラン展開はそれぞれつぎの形にかけているはずである．

$$z=0：\quad p(z)=\frac{p_{-1}}{z}+p_0+p_1z+\cdots,\quad q(z)=\frac{q_{-2}}{z^2}+\frac{q_{-1}}{z}+q_0+q_1z+\cdots$$

$$z=1：\quad p(z)=\frac{\tilde{p}_{-1}}{z-1}+\tilde{p}_0+\tilde{p}_1(z-1)+\cdots,$$

$$q(z)=\frac{\tilde{q}_{-2}}{(z-1)^2}+\frac{\tilde{q}_{-1}}{z-1}+\tilde{q}_0+\tilde{q}_1(z-1)+\cdots$$

$$z=\infty：\quad p(z)=\frac{p_1'}{z}+\frac{p_2'}{z^2}+\cdots,\quad q(z)=\frac{q_2'}{z^2}+\frac{q_3'}{z^3}+\cdots$$

したがって，方程式 (2.1) の決定方程式はそれぞれつぎのようになる．

$$\begin{aligned} &z=0：\rho(\rho-1)+p_{-1}\rho+q_{-2}=0\\ &z=1：\rho(\rho-1)+\tilde{p}_{-1}\rho+\tilde{q}_{-2}=0\\ &z=\infty：\rho(\rho-1)+(2-p_1')\rho+q_{-2}'=0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

これに対し，方程式 (2.34) に対する決定方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned} &z=0：\rho(\rho-1)+(2\lambda+p_{-1})\rho+\lambda(\lambda-1)+\lambda p_{-1}+q_{-2}=0\\ &z=1：\rho(\rho-1)+\tilde{p}_{-1}\rho+\tilde{q}_{-2}=0\\ &z=\infty：\rho(\rho-1)+\{2-(2\lambda+p_1')\}\rho+\lambda(\lambda-1)+\lambda p_1'+q_2'=0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

である．ここで，(2.1) の特性根の組，すなわち (2.36) の根の組を，$\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$\{\beta_1,\beta_2\}$，$\{\gamma_1,\gamma_2\}$ とし $\lambda=\alpha_1$ とおくと，方程式 (2.37) の特性根の組は $\{0,\alpha_2-\alpha_1\}$，$\{\beta_1,\beta_2\}$，$\{\gamma_1+\alpha_1,\ \gamma_2+\alpha_1\}$ となることが示される．たとえば，(2.35) の $z=\infty$ における決定方程式は

$$\rho(\rho-1)+\{2-(2\lambda+p_1')\}\rho+\lambda(\lambda-1)+\lambda p_1'+q_2'$$

$$=\rho(\rho-1)+(2-p_1')\rho+q_2'-2\lambda\rho+\lambda(\lambda-1)+\lambda p_1'$$
$$=(\rho-\gamma_1)(\rho-\gamma_2)-2\lambda\rho+\lambda(\lambda-1)+\lambda(\gamma_1+\gamma_2+1)$$
$$=\rho^2-(\gamma_1+\gamma_2+2\lambda)\rho+\lambda^2+(\gamma_1+\gamma_2)\lambda+\gamma_1\gamma_2$$
$$=(\rho-\gamma_1-\lambda)(\rho-\gamma_2-\lambda)=(\rho-(\gamma_1+\alpha_2))(\rho-(\gamma_2+\alpha_1))=0$$

となるからである．したがって，つぎの補題2.2が示された．

補題 2.2 微分方程式（2.31）に変換 $u=z^{\alpha_1}w$ を施せば，w の一般解は

$$w=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1+\alpha_1, & z \\ \alpha_2-\alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2+\alpha_1 & \end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

で与えられる．

（2.34）にさらに変換

$$w=(z-1)^{\mu}y \quad (\mu=\beta_1) \tag{2.39}$$

を施せば，同様の計算によりyに関する微分方程式は $\{0,1,\infty\}$ を確定特異点とするフックス型微分方程式で，その一般解は

$$y=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma_1+\alpha_1+\beta_1, & z \\ \alpha_2-\alpha_1 & \beta_2-\beta_1 & \gamma_2+\alpha_1+\beta_1 & \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

で表される．ここで改めて $\{0,1,\infty\}$ における特性根をフックスの関係式をみたすように，3個のパラメータ α，β，γ を用いて

$$\{0,1-\gamma\},\quad \{0,\gamma-\alpha-\beta\},\quad \{\alpha,\beta\}$$

と与えることができる．このとき微分方程式は（2.32）から

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1}\right)\frac{du}{dz}+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}u=0$$

または

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2}+\{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z\}\frac{du}{dz}+\alpha\beta u=0 \tag{2.41}$$

となる．微分方程式（2.41）を**超幾何微分方程式**（hypergeometric differential equation）または**ガウス**（C. F. Gauss, 1777－1855）**の微分方程式**という．一般解は

$$u=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha, z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{matrix}\right\} \tag{2.42}$$

である．以上をまとめて

定理 2.7　任意の3点を確定特異点とするフックス型微分方程式は独立変数に対する1次分数変換と，従属変数に対する（2.34），（2.39）の形の変換を行うことにより，超幾何微分方程式（2.41）に帰着される．

第3章　超幾何微分方程式

この章では，まず超幾何微分方程式の特異点$z=0, 1, \infty$ のそれぞれの近傍における基本解を構成する．特に$z=0$ の近傍での１つの解として超幾何級数を定義する．ついで，この超幾何級数を解析接続したとき，$z=1$ および$z=\infty$の近傍で定義されている基本解の線形結合で表すこと，すなわち複素平面上における線形常微分方程式論の中心的課題である接続問題をとり上げる．ここではいわゆる発見的方法といわれるメリン・バーネス積分の留数計算による方法と，オイラー積分による方法を紹介する．また，この結果を用いて解の多価性を特徴づけるモノドロミー群の生成元を求める．最後に超幾何関数と密接な関係にある特殊関数，特に水素原子の波動関数の表現に必要なルジャンドル関数について述べる．

3.1　超幾何級数

A.　超幾何微分方程式

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2}+\{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z\}\frac{du}{dz}+\alpha\beta u=0 \tag{3.1}$$

の一般解は

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha\ ,z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

で表される．一般論によれば，γが整数でなければ，(3.1) は$z=0$ の近傍で２つの線形独立な $\log z$ の項を含まない解をもつ．また，γが整数でも少なくとも１つの $\log z$ を含まない解が存在する．いま，$1-\gamma$ が正の整数でないと仮定しよう．すなわち

$\gamma\neq 0, -1, -2, \cdots$ とする．このとき，(3.1) は特性根 0 に対応する解として

$$u(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n \tag{3.3}$$

とかける解をもつ．係数a_n を求めるために，まえと同じように (3.3) を方程式に代入してz のべきでそろえると

$$(\alpha\beta-\gamma a_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\{(\alpha+n)(\alpha+\beta)a_n-(n+1)(\gamma+n)a_{n+1}\}z^n=0$$

z^nの係数を0とおくことにより

$$a_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

$$a_{n+1}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}a_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad a_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{(n+1)!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)}$$

が得られる．このようにして得られた超幾何微分方程式の1つの解

$$u(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n \tag{3.4}$$

を**超幾何級数**（hypergeometric series）といい，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ で表す．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1$$

であるから，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の収束半径は1であり，$|z|<1$ で正則関数である．なお，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ はパラメータ α，β，γ の関数ともみなされるが，(3.4) から明らかなように，$|z|<1$ のとき，任意の α，β および $\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$ においてそれぞれ α，β，γ の正則関数であることを注意しておく．

ここで，$z=0$ の近傍における基本解を構成しよう．1つの解 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ と線形独立なもう1つの解を求めればよい．特性根 $1-\gamma$ に対応する解を未定係数法を用いて計算してもよいが，つぎのように変換 (2.34) を応用すれば，3個のパラメータ α，β，γ の置き換えによって簡単に得られる．微分方程式 (3.1) に変換

$$u=z^{1-\gamma}w \tag{3.5}$$

を施せば，$\{0,1,\infty\}$ を確定特異点とする超幾何微分方程式が得られることを説明しよう．補題2.2において $\alpha_1=1-\gamma$ とおけば，w のみたす微分方程式の一般解は

$$w=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha-\gamma+1 & z \\ \gamma-1 & \gamma-\alpha-\beta & \beta-\gamma+1 & \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

と表すことができる．(3.2) において3つのパラメータ $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ を $\{\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma\}$ と置きかえてみると，(3.6) と一致することがわかる．したがって，(3.6) を一般解とする微分方程式は超幾何微分方程式

$$z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2}+\{(\gamma-2)+(3+\alpha+\beta-2\gamma)z\}\frac{dw}{dz}+(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)w=0 \tag{3.7}$$

であり，$2-\gamma\fallingdotseq 0, -1, -2, \cdots$，すなわち $\gamma\fallingdotseq 2, 3, \cdots$ ならば

$$w=F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z) \tag{3.8}$$

は (3.7) の 1 つの解である．変換 (3.5) をもとにもどして，つぎの定理が得られる．

定理 3.1 超幾何微分方程式 (3.1) は γ が整数でないとき，$|z|<1$ において線形独立な 2 つの解

$$\begin{cases} u_1^{(0)}(z)=F(\alpha,\beta,\gamma,z) \\ u_2^{(0)}(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z) \end{cases} \tag{3.9}$$

をもつ．ここで $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は (3.4) で定義されたべき級数である．

B. $\gamma=0, -1, -2, \cdots$ のときは $u_1^{(0)}(z)$ が存在せず，$\gamma=2, 3, \cdots$ のときは $u_2^{(0)}(z)$ が存在しない．$\gamma=1$ のときは $u_1^{(0)}(z)=u_2^{(0)}(z)$ となってしまう．γ が整数である場合には§2.2 B によれば，$\log z$ を含む解が得られることになる．

$\gamma=-n(n=0, 1, 2, \cdots)$ の場合は

$$u_2^{(0)}(z)=z^{n+1}F(\alpha+n+1, \beta+n+1, n+2, z)$$

は 1 つの解で，これと線形独立なもう 1 つの解は未定係数法の代わりにつぎのように計算することもできる．まず

$$\begin{aligned}(\gamma+n)F(\alpha,\beta,\gamma,z)&=(\gamma+n)\left\{1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}z\right.\\ &\qquad\left.+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n\,!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n\right\}\\ &\qquad+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{(n+1)\,!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^{n+1}\\ &\qquad\left\{1+\frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)(\gamma+n+1)}z+\cdots\right\}\end{aligned}$$

右辺の第 2 項の括弧の中を z と γ の関数と考え $h(z,\gamma)$ とおく．級数

$$\begin{aligned}h(z,\gamma)&=1+\frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(n+2)(\gamma+n+1)}z\\ &\qquad+\frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\beta+n+1)(\beta+n+2)}{(n+2)(n+3)(\gamma+n+1)(\gamma+n+2)}z^2+\cdots\end{aligned}$$

の係数は $F(|\alpha|+n+1, |\beta|+n+1, n+1-|\gamma|, z)$ の係数より小であるから，$|z|<1$，$|\gamma+n|<1$ において z と γ の正則関数である．よって $|z|\leqq R<1$ において一様に

$$\lim_{\gamma\to -n} h(z,\gamma)=F(\alpha+n+1, \beta+n+1, 2+n, z)$$

が成り立つ．したがって

$$\lim_{\gamma\to -n}(\gamma+n)F(\alpha,\beta,\gamma,z)=Az^{n+1}F(\alpha+n+1,\beta+n+1,2+n,z)$$

$$A=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{(n+1)\,!\,(-1)^n n\,!}$$

を得る．ここで

$$w(z,\gamma)=Az^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)-(\gamma+n)F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

とおくと $\lim_{\gamma\to -n} w(z,\gamma)=0$，かつ $\gamma\neq -n$ のとき (3.1) の解であるから

$$\frac{d^2w(z,\gamma)}{dz^2}+\frac{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z}{z(z-1)}\frac{dw(z,\gamma)}{dz}+\frac{\alpha\beta\, w(z,\gamma)}{z(z-1)}=0$$

をみたす．$w(z,\gamma)$ は $\gamma=-n$ の近傍で γ の正則関数であるから，γ について微分できる．上式を γ で微分すると

$$\frac{d^2\dot{w}(z,\gamma)}{dz^2}+\frac{\{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z\}}{z(z-1)}\frac{d\dot{w}(z,\gamma)}{dz}+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\dot{w}(z,\gamma)=\frac{1}{z(z-1)}\frac{dw(z,\gamma)}{dz}$$

となる．ただし，$\dot{w}(z,\gamma)$ は $\dfrac{\partial w(z,\gamma)}{\partial\gamma}$ を表すものとする．

ここで，$\lim_{\gamma\to -n} w(z,\gamma)=0$ が $|z|\leqq R<1$ において一様に成り立つことから

$$\lim_{\gamma\to -n}\frac{dw(z,\gamma)}{dz}=0$$

を導くことができる（定理1.18）．したがって

$$\lim_{\gamma\to -n}\dot{w}(z,\gamma)=\left.\frac{\partial w(z,\gamma)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=-n}$$

は (3.1) の解である．ところで

$$\dot{w}(z,\gamma)=-Az^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)\log z+Az^{1-\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)-\frac{\partial}{\partial\gamma}(\gamma+n)F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

であるから

$$\dot{w}(z,-n)=-Az^{n+1}F(\alpha+n+1,\beta+n+1,2+n,z)\log z+F_1(\alpha,\beta,n,z)$$

$$F_1(\alpha,\beta,n,z)=\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\{Az^{n+1}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)\right.$$
$$\left.-(\gamma+n)F(\alpha,\beta,\gamma,z)\}\right]_{\gamma=-n}$$

が $u_2(z)$ と線形独立なもう1つの解である．$F_1(\alpha,\beta,n,z)$ は $\log z$ を含まないべき級数である．

同様にして，$\gamma=n\,(n=1,2,\cdots)$ の場合，基本解は

$$u_1(z)=F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$
$$u_2(z)=B\cdot F(\alpha,\beta,n,z)\log z+F_2(\alpha,\beta,n,z)$$

で与えられる．ここで，B は

$$B=\begin{cases}\dfrac{(\alpha+1)\cdots(\alpha-n+1)(\beta+1)\cdots(\beta-n+1)}{(n-1)!(-1)^{n-2}(n-2)!} & (n\geqq 2)\\ 1 \quad (n=1) & \end{cases}$$

であり，また F_2 は

$$F_2(\alpha,\beta,n,z)=\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{-z^{1-n}(\gamma-n)F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)\right.\right.$$
$$\left.\left.+BF(\alpha,\beta,\gamma,z)\right\}\right]_{\gamma=n}$$

である．

C. つぎに超幾何微分方程式 (3.1) の他の特異点 $z=1$ および $z=\infty$ の近傍における基本解を求めよう．これらは，いずれも (3.9) から独立変数の変換とそれに伴うパラメータの置換によって得られる．まず，特異点 $z=1$ の近傍における基本解を求めるには，方程式 (3.1) に変換 $\mathfrak{z}=1-z$ を施すと，特異点は $\{0,1,\infty\}$ から $\{1,0,\infty\}$ にうつる．補題2.1によれば，対応する特異点における特性根は不変であるから，リーマンの P 関数は

$$u(\mathfrak{z})=P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha\ , & \mathfrak{z}=1-z\\ \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \beta & \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

となる．(3.2) と (3.10) を比較すると，パラメータの置換

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}\to\{\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1\}$$

によって (3.2) から (3.10) が得られることがわかる．したがって，定理3.1に対応してつぎの定理が得られる．

定理 3.2 超幾何微分方程式 (3.1) は $\alpha+\beta-\gamma$ が整数でないとき，$|z-1|$

<1 において基本解

$$\begin{cases} u_1{}^{(1)}(z)=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z) \\ u_2{}^{(1)}(z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z) \end{cases} \tag{3.11}$$

をもつ．

つぎに $z=\infty$ における解を求める．変換 $z=1/\zeta$ によって，特異点は $\{0,1,\infty\}$ から $\{\infty,1,0\}$ にうつり，それに応じて，リーマンの P 関数は

$$u(\zeta)=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & 0 & 0 & ,\ \zeta=\dfrac{1}{z} \\ \beta & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma & \end{Bmatrix}$$

へうつる．さらに，従属変数の変換 $u=z^{\alpha}w$ を施せば補題2.2から，w に関する一般解は

$$w(\zeta)=P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & \zeta \\ \beta-\alpha & \gamma-\alpha-\beta & 1-\gamma+\alpha & \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

で与えられる．(3.2) においてパラメータと独立変数の置換

$$\{\alpha,\beta,\gamma,z\}\to\{\alpha,1-\gamma+\alpha,1+\alpha-\beta,\zeta\}$$

を行えば，(3.12) が得られる．変換をもとにもどすことにより，つぎの定理が得られる．

定理 3.3　超幾何微分方程式 (3.1) は $\alpha-\beta$ が整数でないとき，$|z|>1$ において基本解

$$\begin{cases} u_1{}^{(\infty)}(z)=\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\ \dfrac{1}{z}\right) \\ u_2{}^{(\infty)}(z)=\left(\dfrac{1}{z}\right)^{\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\ \dfrac{1}{z}\right) \end{cases} \tag{3.13}$$

をもつ．

D. 超幾何級数 (3.4) は α かまたは β が負の整数の場合には途中で切れて多項式となる．α を $-n$，β を $\alpha+n\,(n=0,1,2,\cdots)$ として得られる n 次の多項式

$$\mathrm{n}(\alpha,\gamma,z)=F(-n,\alpha+n,\gamma,z)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdots(\alpha+n+k-1)}{k\,!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}z^n$$

を n 次のヤコビ（C. G. Jacobi，1804～1851）の多項式という．またよく知られた関数の級数展開が超幾何級数の特別の場合となっている．

例 3.1

（1）　$F(-n,\beta,\beta,-z)=(1+z)^n$

（2）　$F(\alpha,\beta,\beta,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}z^n=(1-z)^{-\alpha}$

（3）　$F(1,1,2,-z)=\frac{1}{z}\log(1+z)$

（4）　$F(1,1,2,z)=-\frac{1}{z}\log(1-z)$

（5）　$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2\right)=\frac{1}{z}\sin^{-1}z$

また，第 1 種および第 2 種完全楕円積分は

（6）　$K(k)=\frac{\pi}{2}F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\quad(k^2<1)$

（7）　$E(k)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\quad(k^2<1)$

と表される．

3.2　超幾何級数の解析接続，1

超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は，$\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$ であるとき $|z|<1$ において正則な，超幾何微分方程式（3.1）の解であった．一般論によれば，この解は特異点 1，∞ を通らない道に沿って解析接続可能であるが，具体的にはどのようにしたらよいであろうか．この節では $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の**メリン・バーネス積分**（Mellin-Barnes integral）とよばれる積分表示を与え，それの留数計算を行うことにより，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は $z=\infty$ の近傍における基本解（3.13）の線形結合で表されることを示そう．

A. s を複素数の独立変数，z を複素パラメータとする関数

$$f(s)=g(s)\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s,\quad g(s)=\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(\gamma+s)}\tag{3.14}$$

を考える．Γ はガンマ関数（第 7 章）を表す．また $(-z)^s$を

$$|\arg(-z)|<\pi\quad（正の実軸を除く）$$

において

$$(-z)^s = \exp\{s\log(-z)\}, \quad \log(-z) = \log|z| + i\arg(-z)$$

と定義すれば，$f(s)$ は一意的に確定する．

まず，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の定義と Γ 関数の性質 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ から

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\gamma+n)}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}g(n)z^n \tag{3.15}$$

とかき表すことができることを注意しておこう．つぎに $f(s)$ の極と留数を計算する．Γ 関数の公式 (7.6) から $\Gamma(1+s)\Gamma(-s) = -\pi/\sin\pi s$．よって

$$f(s) = \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(\gamma+s)}\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s = -\frac{\Gamma(-s)\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s$$

$\Gamma(z)$ は $z=0, -1, -2, \cdots$ で1位の極をもつことから，$f(s)$ の極は3つの組 $\{n\}, \{-\alpha-n\}$，$\{-\beta-n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ で与えられる．ここでパラメータ α, β に対し，α, β は0または負の整数でないこと，および $\alpha-\beta$ が整数でないことを仮定すると，3つの組の極は互いに異なっている．また，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ が定義できるためには，γ は0または負の整数であってはならない．したがって，以下本節ではつぎの仮定のもとに話を進めていくことにする．

仮定　(i)　α, β, γ は0または負の整数ではない，

(ii)　$\alpha-\beta$ は整数ではない．

極における留数を求める．

(1)　$s=n(n=0,1,2,\cdots)$ における留数 $R(n)$ は

$$\begin{aligned} R(n) &= \lim_{s\to n}(s-n)f(s) = \lim_{s\to n} g(s)\frac{\pi(s-n)}{\sin\pi s}(-z)^s \\ &= (-1)^n g(n)(-z)^n = g(n)z^n \end{aligned}$$

(2)　$s=-\alpha-n(n=0,1,2,\cdots)$ における留数 $R(-\alpha-n)$ は

$$\begin{aligned} R(-\alpha-n) &= \lim_{s\to-\alpha-n}(s+\alpha+n)f(s) \\ &= \lim_{s\to-\alpha-n}\frac{(s+\alpha+n)\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(\gamma+s)}\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s \\ &= \lim_{s\to-\alpha-n}\frac{-(s+\alpha+n)\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s \\ &= -(-1)^n\frac{\Gamma(\beta-\alpha-n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\gamma-\alpha-n)}(-z)^{-\alpha-n} \\ &= -\frac{\Gamma(\beta-\alpha-n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\gamma-\alpha-n)}(-z)^{-\alpha}z^{-n} \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{s\to-\alpha-n}(s+\alpha+n)\Gamma(\alpha+s)=\lim_{s\to-\alpha-n}\frac{(s+\alpha+n)\Gamma(s+\alpha+n+1)}{(s+\alpha+n)(s+\alpha+n-1)\cdots(s+\alpha)}$$

$$=\frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-n)}=\frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)}$$

を用いた．

（3） $s=-\beta-n(n=0,1,2,\cdots)$ における留数 $R(-\beta-n)$ は（2）と同様にして

$$R(-\beta-n)=\frac{\Gamma(\alpha-\beta-n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\gamma-\alpha-n)}(-z)^{\beta}z^{-n}$$

ここで，$R(-\alpha-n)$ と $R(-\beta-n)$ をつぎのように変形する．$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin\pi s$ を用いて

$$\Gamma(s-n)\Gamma(1-s+n)=\frac{\pi}{\sin\pi(s-n)}=(-1)^n\frac{\pi}{\sin\pi s}=(-1)^n\Gamma(s)\Gamma(1-s)$$

であるから

$$\Gamma(\beta-\alpha-n)=(-1)^n\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(1-\beta+\alpha)}{\Gamma(1-\beta+\alpha+n)}$$

を得る．同様にして

$$\Gamma(\alpha-\beta-n)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(1-\alpha+\beta+n)}$$

$$\Gamma(\gamma-\beta-n)=(-1)^n\frac{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\gamma+\beta)}{\Gamma(1-\gamma+\beta+n)}$$

$$\Gamma(\gamma-\alpha-n)=(-1)^n\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\alpha)}{\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}$$

が成り立つから

$$R(-\alpha-n)=-\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(1-\beta+\alpha)\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(1-\beta+\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\alpha)\Gamma(1+n)}z^{-n}(-z)^{-\alpha}$$

$$R(-\beta-n)=-\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha+\beta)\Gamma(1-\gamma+\beta+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(1-\alpha+\beta+n)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\gamma+\beta)\Gamma(1+n)}z^{-n}(-z)^{-\beta}$$

とかかれる．

そこで，3つの組の極 $\{n\}$，$\{-\alpha-n\}$，$\{-\beta-n\}$ における留数の和を求めてみよう．まず，(3.14) から

$$\sum_{n=0}^{\infty}R(n)=\sum_{n=0}^{\infty}g(n)z^n=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z) \tag{3.16}$$

つぎに

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(-\alpha-n) = -(-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\beta+\alpha)\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(1-\beta+\alpha+n)\Gamma(1-\gamma+\alpha)\Gamma(1+n)}z^{-n}$$

ここで，(3.15) から

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)}z^{n}$$

したがって

$$F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(1-\gamma+\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(1+\alpha-\beta+n)\Gamma(1+n)}z^{-n}$$

とかかれるから，結局

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(-\alpha-n) = -(-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{z}\right) \tag{3.17}$$

となる．同様にして

$$\sum_{n=0}^{\infty} R(-\beta-n) = -(-z)^{-\beta}\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}F\left(\beta, 1+\beta-\gamma, 1+\beta-\alpha, \frac{1}{z}\right) \tag{3.18}$$

が得られる．(3.17) と (3.18) は超幾何微分方程式 (3.1) の $z=\infty$ における基本解 (3.13) の定数倍となっていることに注目しよう．

B. 以上の準備をもとにつぎの接続公式 (connection formula) を証明する．

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z) = (-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}F\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta, \frac{1}{z}\right)$$
$$+(-z)^{-\beta}\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}F\left(\beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\beta-\alpha, \frac{1}{z}\right) \tag{3.19}$$

この等式は $|z|<1$ で定義された $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の $|z|>1$ への解析接続が $z=\infty$ における基本解の線形結合で表されることを意味している．

定理 3.4　メリン・バーネス積分 $G_\lambda(z)$ をつぎの積分で定義する．

$$G_\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\lambda} f(s)ds \tag{3.20}$$

ここで，$f(s)$ は (3.14) で定義された関数であり，また積分路 L_λ は s–平面上において，(i) $f(s)$ の極を通らず，(ii) $|s|$ が十分大きいとき s–平面の

虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}\, s=\lambda$ に沿って $\pm\infty$ にのびているものとする（図 3.1）．このときつぎが成り立つ．

（1） $G_\lambda(z)$ は $|z|>0$，$|\arg(-z)|<\pi$ において 1 価正則である．

（2） $G_\lambda(z)$ は $0<|z|<1$ では，積分路 L_λ の右側にある極における留数の和である．

（3） $G_\lambda(z)$ は $|z|>1$ では，積分路 L_λ の左側にある極における留数の和に負号をつけたものである．

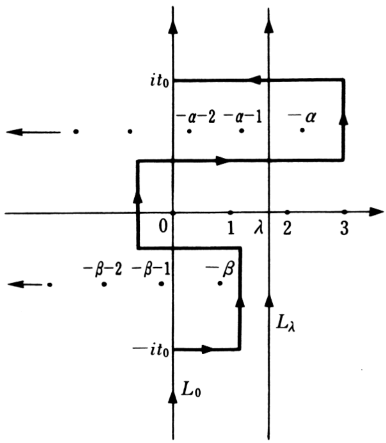


図 3.1 $f(s)$ の極と L_λ，L_0

定理 3.4 の証明に入るまえに，この結果を用いて超幾何級数の解析接続の公式 (3.19) を導いておく．α，β，γ が 0 かまたは負の整数でないとき

$$G_0(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} f(s)ds \qquad (3.21)$$

とおく．積分路 L_0 は $s=\sigma+it$ とおいたとき，$|t|\geqq t_0$，$t_0>\max\{|\mathrm{Im}(\alpha)|, |\mathrm{Im}(\beta)|\}$ では $\sigma=0$ 上を，また $-it_0$ と it_0 の間では，極 $n(n=0, 1, 2, \cdots)$ は全て右側に，そして他の極 $-\alpha-n$，$-\beta-n(n=0, 1, 2, \cdots)$ は全て左側にあるようにとる（図 3.1）．そうすると定理 3.4 と（3.16）からまず

$$G_0(\lambda)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z) \quad (0<|z|<1, |\arg(-z)|<\pi) \qquad (3.22)$$

が成り立つ．右辺は $|z|<1$ において正則な関数であるから，関数論の解析接続の

理論（§1.7 B）から実は (3.22) は $|z|<1$ で成り立つ.

つぎに $\alpha-\beta$ が整数でないときは定理3.4と (3.17), (3.18) を用いて

$$G_0(z)=(-z)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right)$$
$$+(-z)^{-\beta}\frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right) \tag{3.23}$$
$$(|z|>1,\quad |\arg(-z)|<\pi)$$

が得られる. このようにして (3.22) と (3.23) から, $|z|<1$ で定義された超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ はメリン・バーネス積分 (3.21) を仲介として $|z|>1$, $|\arg(-z)|<\pi$ へ解析接続され, 公式 (3.19) が成り立つことが示されたことになる.

注意　$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は微分方程式 (3.1) の解で, 方程式の特異点1と∞を除いて正則関数として解析接続される. 一般に, $z=1$, ∞は分岐点であるので, この2つの分岐点を結ぶ直線に沿って切断を入れることにより, F を1価とし多価性を避ける. $|z|>1$ に対して $|\arg(-z)|<\pi$（正の実軸を除く）としているのはこのことに対応していると考えられる.

また, 定理3.4と (3.22) は $\alpha-\beta$ が整数であっても成り立つが, とくに $\alpha-\beta$ が整数でないとき (3.23), したがって (3.19) が成り立つわけである. さらに, α および β は0または負の整数でないものとして (3.19) を導いたが, これらの場合には $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ が多項式となるので, 解析接続を考える必要はないのである.

C. 定理3.4の（1）の証明

$G_\lambda(z)$ が $|z|>0$, $|\arg(-z)|<\pi$ において, 1価正則であることの証明.

まず, ガンマ関数に関するスターリングの公式 (7.9) を用いると

$$\frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(s)s^{\alpha}}\sim\frac{(\alpha+s)^{\alpha+s-1/2}e^{-(\alpha+s)}}{s^{\alpha+s-(1/2)}e^{-s}}=e^{-\alpha}\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^{s}\left(1+\frac{\alpha}{s}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sim 1$$

$$\therefore\quad \frac{\Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(s)}\sim s^{\alpha}\quad (s\to\infty,\ |\arg s|<\pi)$$

$$\therefore\quad g(s)=\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(\gamma+s)}=\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(s)\Gamma(s)\Gamma(1+s)\Gamma(\gamma+s)}\sim s^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

すなわち, 1より大きい R と, 十分小さい任意の正数 δ に対し

$$|s|\geqq R,\quad |\arg s|\leqq\pi-\delta \tag{3.24}$$

において, s に無関係の正数 M が存在して

$$|g(s)|\leqq M(1+|s|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|} \tag{3.25}$$

が成り立つ（なお，以下のいくつかの不等式において正数 M がしばしば出てくるが，これは一定の数ではなく，不特定な有限な正の値を表すものとする）.

つぎに $(-z)^s$ を評価する．十分小さい任意の正数 δ に対し

$$|z|>0, \quad |\arg(-z)|\leqq\pi-\delta \tag{3.26}$$

において，$s=\sigma+it$ とおくと

$$\begin{aligned}|(-z)^s|&=|\exp(\sigma+it)\log(-z)|=\exp\{\sigma\log|z|-t\arg(-z)\}\\ &\leqq|z|^\sigma\exp(\pi-\delta)|t|\end{aligned} \tag{3.27}$$

をみたす.

最後に $\pi/\sin\pi s$ は，$s=\sigma+it$ とおくと $|t|\geqq t_0>0$ において正数 M が存在し

$$\begin{aligned}\left|\frac{\pi}{\sin\pi s}\right|&=\left|\frac{2\pi}{e^{\pi i(\sigma+it)}-e^{-\pi i(\sigma+it)}}\right|<\frac{2\pi}{e^{\pi|t|}-e^{-\pi|t|}}\\ &=\frac{2\pi e^{-\pi|t|}}{1-e^{-2\pi|t|}}<Me^{-\pi|t|}\end{aligned} \tag{3.28}$$

が成り立つ.

そこで，積分路上の $s=\sigma+it$ において t_0 を十分大にとり，$|t|\geqq t_0$ のとき (3.25) と (3.28) がともに成り立つようにする．そうすると，(3.25)，(3.27)，および (3.28) から，$s=\sigma+it$ において $\sigma=\lambda$ と固定したとき

$$T_1, T_2>t_0 \quad \text{または} \quad T_1, T_2<-t_0 \quad (T_2>T_1)$$

ならば

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda+iT_1}^{\lambda+iT_2}g(s)\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s ds\right|<M|z|^\lambda\int_{T_1}^{T_2}(1+|s|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}e^{-\delta|t|}dt$$

をみたす．$m\geqq0$ のとき $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}t^m e^{-\delta|t|}dt$ は絶対収束することから，任意の正数 ε，および任意の正数 $P>\rho$ に対し，T_0 が存在して

$$T_1, T_2>T_0 \quad \text{または} \quad T_1, T_2<-T_0$$

ならば

$$\rho\leqq|z|\leqq P, \quad |\arg(-z)|\leqq\pi-\delta \tag{3.29}$$

において

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda+iT_1}^{\lambda+iT_2}g(s)\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s ds\right|<\varepsilon \tag{3.30}$$

が成り立つ.

十分大きい正数 T に対し，$L_\lambda(T)$ を積分路 L_λ の $|t|\leqq T$ をみたす部分とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\lambda(T)} g(s)\,\frac{\pi}{\sin \pi s}\,(-z)^s ds$$

は $|z|>0$, $|\arg(-z)|<\pi$ において1価正則であり，$T\to\infty$ とすると，(3.30) から (3.29) において一様収束する．したがって，関数論の結果（補題7.1 および 7.2）から

$$G_\lambda(z)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\lambda(T)} g(s)\,\frac{\pi}{\sin \pi s}\,(-z)^s ds$$

は (3.26) において1価正則である．これで定理の（1）は示された．

D．定理の（2）と（3）の証明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\mu} f(s)ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\nu} f(s)ds \quad (\mu>\nu)$$

を考える．簡単のため積分路 L_μ および L_ν はそれぞれ虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}\, s=\mu$, および $\mathrm{Re}\, s=\nu$ とし，$f(s)$ の極を通らないものとする．

このとき，任意の正数 ε に対して正数 $T(\varepsilon)$ が存在して，$|T|>T(\varepsilon)$ ならば

$$0<\rho\leqq|z|\leqq P,\quad |\arg(-z)|\leqq\pi-\delta$$

において一様に

$$\left|\int_{\nu+iT}^{\mu+iT} f(s)ds\right|<\varepsilon \quad (s=\sigma+it, ds=d\sigma) \tag{3.31}$$

が成り立つことを示そう．

(3.25)，(3.27) および (3.28) から

$|s|\geqq R \quad (R>1)$,　$|\arg\, s|\leqq\pi-\delta \quad (\delta>0)$,　$|T|\geqq t_0 \quad$ (t_0十分大)

$|z|>0$,　$|\arg(-z)|\leqq\pi-\delta$

ならば，s と z に無関係な M が存在して

$$\left|\int_{\nu+iT}^{\mu+iT} f(s)ds\right|<M\int_\nu^\mu (1+|s|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}|z|^\sigma e^{-\delta|T|}d\sigma$$

ここで，t_0 をさらに大きくとり，$|T|\geqq t_0$ のとき $s=\sigma+iT(\nu\leqq\sigma\leqq\mu)$ が $|\arg s|\leqq\pi-\delta$ をみたすようにできるから

$$\left|\int_{\nu+iT}^{\mu+iT} f(s)ds\right|<(\mu-\nu)M(1+|\mu|+|\nu|+|T|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}|z|^{\mu+\nu}e^{-\delta|T|}$$

となる．右辺は $|T|\to\infty$ のとき0に収束するから，(3.31) が示された．

T を $\max\{|\mathrm{Im}(\alpha)||\mathrm{Im}(\beta)|\}$ より大とし，s–平面上の長方形 Π を

$$s=\sigma+it : \sigma=\mu,\quad -T\leqq t\leqq T$$

$$\nu\leqq\sigma\leqq\mu,\quad t=T$$

$$\sigma=\nu,\quad -T\leqq t\leqq T$$

$$\nu\leqq\sigma\leqq\mu,\quad t=-T$$

とする（図 3.2）．

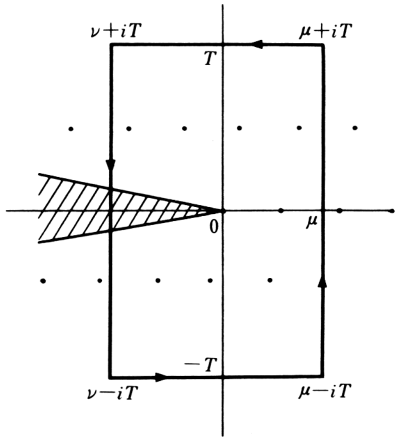


図 3.2 s–平面上の Π

$f(s)/2\pi i$ を Π に沿って正の向きに積分すると

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mu-iT}^{\mu+iT}+\int_{\mu+iT}^{\nu+iT}+\int_{\nu+iT}^{\nu-iT}+\int_{\nu-iT}^{\mu-iT}f(s)ds\right\}=[\mathrm{Res}\,f(s)]_{(\nu,\mu)}$$

ここで，$[\mathrm{Res}\ f(s)]_{(\nu,\mu)}$ は $f(s)$ の $\nu<\mathrm{Res}<\mu$ の間にある極における留数の和を表すものとする．この値は $T>\max\{|\mathrm{Im}(\alpha)|,\ |\mathrm{Im}(\beta)|\}$ である限り T には無関係の値である．(3.31) から $|T|>T(\varepsilon)$ ならば

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mu-iT}^{\mu+iT}f(s)ds-\int_{\nu-iT}^{\nu+iT}f(s)ds\right\}-[\mathrm{Res}\,f(s)]_{(\nu,\mu)}\right|$$

$$\leqq\left|\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mu+iT}^{\nu+iT}f(s)ds+\int_{\nu-iT}^{\mu-iT}f(s)ds\right\}\right|<\frac{\varepsilon}{\pi}$$

したがって，$T\to\infty$ として

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\mu}f(s)ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\nu}f(s)ds=[\mathrm{Res}\ f(s)]_{(\nu,\mu)} \tag{3.32}$$

が得られる．ここで，つぎの 2 式を仮定する．

$$0<|z|<1,\quad |\arg(-z)|<\pi$$

ならば

$$\lim_{k\to\infty}\int_{L_k} f(s)ds=0 \tag{3.33}$$

$$|z|>1, \quad |\arg(-z)|<\pi$$

ならば

$$\lim_{l\to\infty}\int_{L_{-l}} f(s)ds=0 \tag{3.34}$$

ただし，k と l は積分路 L_k および L_{-l} は $f(s)$ の極を通らないようにとるものとする．たとえば，n を自然数として

$$k=\frac{1}{2}+n$$

$$l=-\lambda+n \ (\lambda \text{ は正で，} \lambda+\alpha,\ \lambda+\beta \text{ は整数でないようにとる})$$

とおいて $n\to\infty$ とすればよい．

(3.33) および (3.34) は後で示すこととし，先に定理 3.4 の証明を完結しておく．

定理の（2）の証明．$0<|z|<1$，$|\arg(-z)|<\pi$ のときは (3.32) において $\mu\to\infty$ とすることにより

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\nu} f(s)ds=[\operatorname{Res} f(s)]_{(\nu,\infty)}$$

＝積分路 L_ν の右側にある極における留数の和が得られる．

定理の（3）の証明．$|z|>1$，$|\arg(-z)|<\pi$ のときは (3.32) において $\nu\to-\infty$ として

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\mu} f(s)ds=[\operatorname{Res} f(s)]_{(-\infty,\mu)}$$

＝積分路 L_μ の左側にある極における留数の和が得られる．

このようにして定理 (3.4) は証明されるが，あとは上で仮定した (3.33) および (3.34) を示せばよい．

E. (3.33) と (3.34) の証明

まず (3.33) を示そう．k を十分大きくとり，(3.25) が成り立つようにとる．また積分路 L_k を，$|t|\leqq t_0$ をみたす部分と $t\geqq t_0$ をみたす部分にわける．(3.27) と (3.28) を用いて

$$\left|\int_{L_k} f(s)ds\right|\leqq M\int_{\substack{L_k\\|t|\geqq t_0}} (1+|s|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}|z|^k e^{(\pi-\delta)|t|}\left|\frac{\pi}{\sin\pi s}\right|dt$$

$$+M\int_{\substack{L_k\\|t|\leqq t_0}}(1+|s|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}|z|^k e^{(\pi-\delta)|t|}\left|\frac{\pi}{\sin\pi s}\right|dt$$

ここで，$|t|\geqq t_0$ ならば (3.28) から $|\pi/\sin\pi s|\leqq Me^{-\pi|t|}$．また $|t|\leqq t_0$ では，$s=k+it=n+\dfrac{1}{2}+it$ であるから $|\pi/\sin\pi s|\leqq 2\pi e^{-\pi|t|}$ をみたす．

したがって，結局

$$\left|\int_{L_k}f(s)ds\right|\leqq M|z|^k\int_{-\infty}^{\infty}(1+k+|t|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}e^{-\delta|t|}dt$$

$$<M|z|^k k^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}e^{-\delta|t|}dt$$

$$<M|z|^k k^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}$$

$|z|<1$ ならば，$|z|^k=\exp k\log|z|$，$\log|z|<0$ であるから

$$\lim_{k\to\infty}|z|^k k^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}=0$$

を得る．よって，(3.33) が示された．

つぎに (3.34) を示そう．$l\to\infty$ のとき，積分路 L_{-l} は $|\arg s|\leqq\pi-\delta$ をみたさない部分を通るので，不等式 (3.25) を適用することはできない．そこで s の代わりに

$$s'=s+n,\quad s=-l+it=\lambda-n+it\quad(\lambda>0)$$

とおくと，$s'=\lambda+it$ で積分は

$$\int_{L_{-l}}f(s)ds=(-1)^n\int_{L_\lambda}g(s'-n)\frac{\pi}{\sin\pi s'}(-z)^{s'-n}ds'$$

となる．L_λ 上で被積分関数 $g(s'-n)\dfrac{\pi}{\sin\pi s'}(-z)^{s'-n}$ の各項を評価する．

$$g(s'-n)=\frac{\Gamma(\alpha+s'-n)\Gamma(\beta+s'-n)}{\Gamma(1+s'-n)\Gamma(\gamma+s'-n)}$$

$$=\frac{\Gamma(n-s')\Gamma(1-\gamma+n-s')}{\Gamma(1-\alpha+n-s')\Gamma(1-\beta+n-s')}\frac{\sin\pi(1+s')\sin\pi(\gamma+s')}{\sin\pi(\alpha+s')\sin\pi(\beta+s')}$$

と変形する．ここでスターリングの公式 (7.10)，および $s'=\lambda+it$ で λ は $\alpha+\lambda$，$\beta+\lambda$ が整数とならないようにとってあることを用いて，$|n-s'|$を十分大きくとり，$|\arg(n-s')|\leqq\pi-\delta$ ならば

$$|g(s'-n)|\leqq Mn^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}(1+|t|^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}$$

となることが示される．

また，$t\geqq t_0$ であるとき

$$\left|\frac{\pi}{\sin \pi s'}\right| \leqq Me^{-\pi|t|}$$

最後に，$|z|>1$，$|\arg(-z)| \leqq \pi-\delta$ であるとき

$$|(-z)^{s'-n}| \leqq |z|^{\lambda-n} \exp((\pi-\delta)|t|$$

したがって

$$\left|\int_{L_\lambda} g(s'-n)\frac{\pi}{\sin \pi s'}(-z)^{s'-n}ds'\right|$$

$$< Mn^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}|z|^{\lambda-n}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)^{|\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)|}e^{-\delta|t|}dt$$

が得られる．右辺の積分の項は収束し，$|z|>1$ であるから，$n\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束する．このようにして（3.34）が示された．（証明終）

3.3　超幾何級数の解析接続，2

前節では，超幾何微分方程式（3.1）

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2}+\{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z\}\frac{du}{dz}+\alpha\beta u=0 \tag{3.1}$$

の $z=0$ の近傍における 1 つの解 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$（超幾何級数）を $z=\infty$ における基本解の線形結合で表すこと，すなわち接続公式（3.19）をメリン・バーネス積分 $G_0(z)$ の留数計算を通して求めた．ここでは $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ を**オイラー積分**（Euler integral, L. Euler（1707 ～ 1783））で表現し，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は $z=1$ の近傍における基本解の線形結合として表されることを示す．なお，同様な方法によっても接続公式（3.19）を導くことができることを注意しておく．

A. 解のオイラー積分による表現を求める方法はいくつかあるが，ここではオイラー作用素 $\delta_z=z\partial_z$，$\delta_s=s\partial_s$ を用いた方法を紹介しよう．

（3.1）の左辺の微分作用表を L_z とかくと

$$L_z u=-(\delta_z+\gamma)\partial_z u+(\delta_z+\alpha)(\delta_z+\beta)u \tag{3.35}$$

とかくことができる．さて

$$u(z)=\int_C v(s)(1-zs)^\lambda ds \tag{3.36}$$

という形の解を求めよう．ここで，積分の核 $v(s)$，定数 λ および積分路 C を適当にとって解となるようにしたい．

$$\partial_z(1-zs)^\lambda=-\lambda s(1-zs)^{\lambda-1},$$

$$\delta_z(1-zs)^{\lambda-1}=-(\lambda-1)zs(1-zs)^{\lambda-2}=\delta_s(1-zs)^{\lambda-1}$$

であるから

$$(\delta_z+\gamma)\partial_z u=-\lambda\int_C sv(s)\,[(\delta_z+\gamma)(1-zs)^{\lambda-1}]ds$$
$$=-\lambda\int_C sv(s)\,[(\delta_s+\gamma)(1-zs)^{\lambda-1}]ds$$
$$=-\lambda\int_C s^2v(s)\partial_s(1-zs)^{\lambda-1}ds-\lambda\int_C \gamma sv(s)(1-zs)^{\lambda-1}ds$$

ここで，右辺第1項を部分積分して

$$=-\lambda[s^2v(s)(1-zs)^{\lambda-1}]_C+\lambda\int_C\partial_s(s^2v(s))(1-zs)^{\lambda-1}ds$$
$$-\lambda\int_C\gamma sv(s)(1-zs)^{\lambda-1}ds$$

上式の第1項は $[s^2v(s)(1-zs)^{\lambda-1}]_C$ は $s^2v(s)(1-zs)^{\lambda-1}$ の積分路の終点と始点における値の差である．同様に $\delta_z\delta_z(1-zs)^{\lambda}=\delta_s\delta_z(1-zs)^{\lambda}$ が成り立つことに注意して

$$(\delta_z+\alpha)(\delta_z+\beta)u=\int_C v(s)(\delta_z+\alpha)(\delta_z+\beta)(1-zs)^{\lambda}ds$$
$$=\int_C v(s)(\delta_s+\alpha)(\delta_z+\beta)(1-zs)^{\lambda}ds$$
$$=\int_C v(s)(s\partial_s+\alpha)[(\delta_z+\beta)(1-zs)^{\lambda}]ds$$
$$=[sv(s)\{(\delta_z+\beta)(1-zs)^{\lambda}\}]_C$$
$$+\int_C\{-\partial_s(sv(s)+\alpha v(s)\}[(\delta_z+\beta)(1-zs)^{\lambda}]ds$$

ここで，$\lambda=-\beta$ ととれば

$$Lu(z)=[\beta s(1-s)v(s)(1-zs)^{-\beta-1}]_C-\beta\int_C Mv(s)(1-zs)^{-\beta-1}ds \qquad (3.37)$$

ただし

$$Mv(s)=\{s(1-s)\partial_s-(2-\gamma)s+(1-\alpha)\}v(s)$$

となる．$Lu(z)=0$ となるためには，まず $Mv(s)=0$ から

$$\frac{dv}{ds}=\frac{(2-\gamma)s-(1-\alpha)}{s(1-s)}v(s)$$
$$=\left\{\frac{\alpha-1}{s}+\frac{-\gamma+\alpha+1}{(1-s)}\right\}v(s)$$

これをといて

$$v(s)=s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1} \qquad (3.38)$$

が得られる．また．積分路 C は（3.37）の右辺第1項が0となるために

$$[s(1-s)v(s)(1-zs)^{-\beta-1}]_C=[s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}(1-zs)^{-\beta-1}]_C=0 \qquad (3.39)$$

をみたすようにとらなければならない．このとき，解は A を定数として

$$u(z)=A\int_C s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-zs)^{-\beta-1}ds \qquad (3.40)$$

で与えられる．

B. $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0$ の場合を考えよう．このときは積分路 C として0と1を結ぶ線分をとれば，条件（3.39）はみたされる．そして，この積分路の上で

$$\arg s=\arg(1-s)=0, \quad \lim_{z\to 0}\arg(1-sz)=0$$

をみたすものと定めておく．$(1-sz)^{-\beta}$ を $|z|<1$ として2項級数に展開し，項別積分を行えば

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)(-\beta-1)\cdots(-\beta-n+1)}{n!}(-z)^n\int_0^1 s^{\alpha+n-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}ds\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}z^nB(\alpha+n,\ -\alpha+\gamma)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta+n)}{n!\,\Gamma(\beta)}\ \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(-\alpha+\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}z^n\\
&=\frac{\Gamma(-\alpha+\gamma)}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\gamma+n)}z^n=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,z)
\end{aligned}$$

となる．ここでベータ関数とガンマ関数の関係式（7.4）を用いた．

このようにして

$$\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0, \quad |z|<1 \qquad (3.41)$$

である場合には，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の積分表示として

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha+\gamma)}\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds \qquad (3.42)$$

が得られた．つぎに仮定（3.41）がみたされない場合の積分表示を求めておく．任意の α と γ に対して積分の上端と下端の0と1が発散の原因となるので，積分路 C としては図3.3に示されるような，0と1を中に含み遠まきにまわる2重結びの曲線をとる．すなわち，0と1の間の点Aを始点とし1のまわりを正の向きにまわり，ついで0のまわりを正の向きにまわり，さらに1のまわりを負の向きにまわり，最後に0のまわりを負の向きにまわってAに戻るものとする．ただ

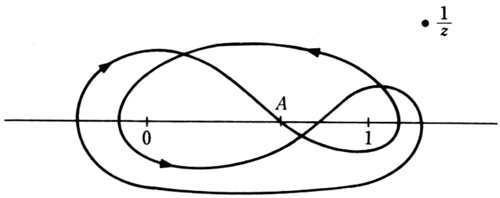


図 3.3

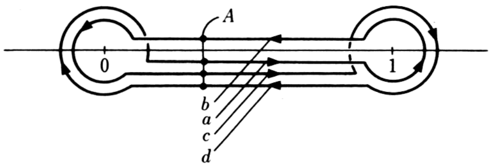


図 3.4

し，被積分関数

$$f(s,z)=s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta} \tag{3.43}$$

は $s=0,1$ の他に $1/z$ も分岐点としてもつので，$1/z$ の影響をさけるために，$s=1/z$ は積分路の外にあるようにとっておく．

このような積分路 C に沿った積分を

$$P(\alpha,\beta,\gamma,z)=\int_C^{(1_+0_+1_-0_-)} f(s,z)ds \tag{3.44}$$

とかくことにしよう．そこで，この積分路が条件（3.39）をみたすこと，および $P(\alpha,\beta,\gamma,z)$ と $\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$|z|<1$ である場合の積分表示（3.42）との関係を調べるために積分路を図 3.4 のように変形する．すなわち，0 と 1 の間の点 A を始点とし，4 本の実軸上の線分 a，b，c，d と，0 と 1 のまわりをまわるそれぞれ 2 個の小円を結んで A にもどるようにする．簡単のため点 A において，$\arg s=\arg(1-s)=0$ とし，また $\arg(1-sz)$ は前と同じように $z\to 0$ のとき 0 となるように定めておく．

条件（3.39）で定義された関数を

$$h(s,z)=s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha}(1-sz)^{-\beta-1}$$

とおき，$f(s,z)$ と $h(s,z)$ が積分路に沿ってどのように変化するかを調べる．たとえば，$h(s,z)$ の点 A を含む線分 a 上での値を基準にとると，1 を正の向きにまわって線分 b 上にくれば，$(1-s)^{\gamma-\alpha}$ の因数のために $e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}h(s,z)$ の値をとり，さらに 0 を正の向きにまわって線分 c 上にくれば，因数 s^{α} のために $e^{2\pi i\alpha}\cdot$

$e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}h(s,z)$ の値をとる．下の表は0と1をまわるために変化する実軸上の線分 a，b，c，d 上での $\arg s$，$\arg(1-s)$ およびそれに応じた $h(s,z)$ と $f(s,z)$ の値を示したものである．なお，0_+ は0のまわりを正の向きに1周することを表したものであり，他も同様である．

	$a(A)$	1_+	b	0_+	c	1_-	d	0_-	$a(A)$
$\arg s$	0		0		2π		2π		0
$\arg(1-s)$	0		2π		2π		0		0
$h(s,z)$	$h(s,z)$		$h(s,z)e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}$		$h(s,z)e^{2\pi i\gamma}$		$h(s,z)e^{2\pi i\alpha}$		$h(s,z)$
$f(s,z)$	$f(s,z)$		$f(s,z)e^{2\pi i(\gamma-\alpha-1)}$		$f(s,z)e^{2\pi i(\gamma-2)}$		$f(s,z)e^{2\pi i(\alpha-1)}$		$f(s,z)$

まず，条件 (3.39) がみたされていることは，上の表から $h(s,z)$ の C の始点 A における値と終点 A における値が等しいことからわかる．したがって，(3.44) で定義された $P(\alpha,\beta,\gamma,z)$ は超幾何微分方程式 (3.1) の解である．つぎに (3.42) との関係を求めるために，$\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0$ と仮定する．このとき，0と1をまわる小円の半径を0に近づければ，それらからの積分への寄与は0になり，実軸上の線分 a，b，c，d に沿った積分が残る．各線分上での $f(s,z)$ の変化と積分の向きから

$$P(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha-1)}+e^{2\pi i(\gamma-2)}-e^{2\pi i(\alpha-1)})\int_0^1 f(s,z)ds$$

$$=(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})\int_0^1 f(s,z)ds$$

となる．したがって，(3.42) と比較することによって

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_C^{(1_+0_+1_-0_-)} f(s,z)ds \tag{3.45}$$

が得られた．(3.45) は条件 $\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$|z|<1$ のもとで導かれたが，解析接続の考えから，左辺かまたは右辺の一方が α，β，γ，z に関して正則となる領域において，他方も正則関数として存在し等号が成り立つことになる．特に $|z|<1$ で定義された超幾何級数は (3.45) の右辺が z の正則関数として存在する領域にまで，正則関数として解析接続される．

定理 3.5　0と1を中に含む2重結びの積分路 C に沿った**オイラー積分**

$$P(\alpha,\beta,\gamma,z)=\int_C^{(1_+0_+1_-0_-)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds \qquad (3.44)$$

は超幾何微分方程式 (3.1) の解である．また，超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の解析接続として

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$
$$\int_C^{(1_+0_+1_-0_-)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta}ds \qquad (3.45)$$

が成り立つ．

注意 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の積分表示 (3.45) は 0 と 1 を中に含む 2 重結びの積分路を用いたが，パラメータの特別の値の場合にはもっと簡単な積分路によって積分表示を与えることができる．

例 3.2 $\gamma-2\alpha$ が整数である場合には $(0_+,1_-)$ で表される 0 と 1 を 8 の字型にまわる積分路をとればよい（図 3.5）．

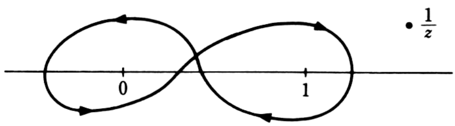


図 3.5

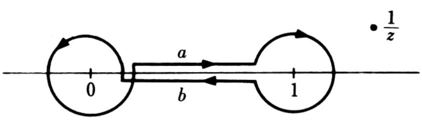


図 3.6

まえと同じように図 3.6 のように変形して，線分 a 上で $\arg s=\arg(1-s)=0$ とする．$\arg s$，$\arg(1-s)$，$h(s,z)$ および $f(s,z)$ の変化を表にする．

	a	1_-	b	0_+	a
$\arg s$	0		0		2π
$\arg(1-s)$	0		-2π		-2π
$h(s,z)$	$h(s,z)$		$h(s,z)e^{-2\pi i(\gamma-\alpha)}$		$h(s,z)e^{2\pi i(2\alpha-\gamma)}=h(s,z)$
$f(s,z)$	$f(s,z)$		$f(s,z)e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-1)}$		$f(s,z)e^{2\pi i(2\alpha-\gamma)}=f(s,z)$

この表と実軸上の積分路 a，b の向きを考慮して

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{1}{(1-e^{2\pi i(\alpha-\gamma)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_C^{(0_+1_-)}f(s,z)ds \quad (3.46)$$

を得る．また，γ が正の整数の場合には，0と1を正の向きに1周する積分路でよい（図3.7）．このときは

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{1}{(1-e^{-2\pi i\alpha})}\frac{(\gamma-1)!}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_C^{(0_+1_+)}f(s,z)\,ds \quad (3.47)$$

となる．

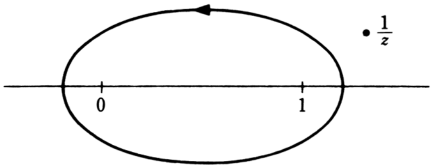


図 3.7

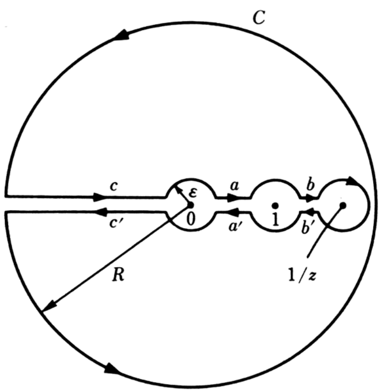


図 3.8

C. 積分表示（3.42）を用いて，$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ を1の近傍での解の線形結合として表すことを考えよう．さしあたり $\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$0<z<1$ と仮定しておく．（3.43）の被積分関数 $f(s,z)$ を図3.8のような積分路 C に沿って積分する．

C は $0, 1, 1/z$ を包む半径 ε の小円，$1/z$ と $-\infty$ を結ぶ実軸上のいくつかの線分，および原点を中心とする半径 R の大円とからなっている．実軸上の線分の部分を図3.8のように a, a', b, b', c, c' と表すことにして，それらの上での $\arg s$，arg

$(1-s)$，$\arg(1-sz)$ の変化はつぎの表のとおりである．ただし，0 と 1 を結ぶ上側の線分 a 上で $\arg s=\arg(1-s)=\arg(1-zs)=0$ と約束しておく．

	a	b	b'	a'	c'	c
s	0	0	0	0	$-\pi$	π
$1-s$	0	$-\pi$	$-\pi$	-2π	-2π	0
$1-sz$	0	0	-2π	-2π	-2π	0

C の内部には $f(s,z)$ の特異点はないから，コーシーの積分定理から

$$\int_C f(s,z)ds=\int_C s^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha+\gamma-1}(1-sz)^{-\beta}ds=0$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{Re}\,\beta>\mathrm{Re}(\gamma-1)$，$\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha$，$\mathrm{Re}\,\beta<1$ すなわち

$$2>\mathrm{Re}(\beta+1)>\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$$

と仮定しよう．このとき，大円と $0, 1, 1/z$ のまわりの小円上での積分の値は $R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$ とすれば 0 となり，実軸上における積分だけが残る．したがって

$$\int_{a+a'} f(s,z)ds+\int_{b+b'} f(s,z)ds+\int_{c+c'} f(s,z)ds=0$$

となる．線分 a 上での $f(s,z)$ を基準にして，他の線分上での $\arg s$，$\arg(1-s)$，$\arg(1-sz)$ の変化と積分の向きを考慮すれば

$$[1-e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}]\int_0^1 f(s,z)ds$$

$$+[e^{-\pi i(\gamma-\alpha-1)}]e^{-\pi i(\gamma-\alpha-2\beta-1)}]\int_1^{\frac{1}{z}} f(s,z)ds$$

$$+[e^{\pi i(\alpha-1)}-e^{-\pi i(\alpha-2\alpha+2\gamma-2\beta-3)}]\int_{-\infty}^0 (s,z)ds=0$$

が得られる．上式に $\dfrac{1}{2i}e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}$ を乗じ，さらに第 2 項と第 3 項の積分区間を $[0,\ 1]$ にうつすために第 2 項では $s=\dfrac{1}{1-(1-z)t}$，第 3 項では $s=\dfrac{t}{t-1}$ と変数変換を行えば

$$\begin{aligned}&\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)\int_0^1 f(s,z)ds\\&+\sin\pi\beta(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{-\beta}\{1-(1-z)t\}^{\beta-\gamma}dt\\&-\sin\pi(\gamma-\beta)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\gamma}\{1-(1-z)t\}^{-\beta}dt=0\end{aligned}\tag{3.48}$$

となる．第2項を確かめてみよう．まず

$$\frac{1}{2i}e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}[e^{-\pi i(\gamma-\alpha-1)}-e^{-\pi i(-\alpha+\gamma-2\beta-1)}]=\frac{1}{2i}\{e^{\pi i(1-\beta)}-e^{-\pi i(1-\beta)}\}=\sin\pi\beta$$

また

$$s=\frac{1}{1-(1-z)t},\quad ds=\frac{(1-z)}{\{1-(1-z)t\}^2}dt$$

$$(1-s)^{\gamma-\alpha-1}=\left\{\frac{(1-z)t}{1-(1-z)t}\right\}^{-\alpha+\gamma-1}$$

$$(1-sz)^{-\beta}=\left\{\frac{(1-z)(1-t)}{1-(1-z)t}\right\}^{-\beta}$$

ゆえに

$$f(s,z)ds=t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{-\beta}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\{1-(1-z)t\}^{\beta-\gamma}dt$$

第3項も同様に験証することができる．(3.48) は (3.42) と関係式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z=-\Gamma(-z)\Gamma(1+z)$ を用いると

$$\frac{\pi}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$

$$+\frac{\pi}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z)$$

$$-\frac{\pi}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z)=0$$

と変形できて，さらに目的であったつぎの接続公式が得られる．

定理 3.6

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z)\tag{3.49}$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z)$$

$$(\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots,\ \gamma-\alpha-\beta\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots,\ |\arg(1-z)|<\pi)$$

接続公式 (3.49) を導く過程では，α, β, γ および z に対しいくつかの仮定をしたが，解析接続の考えによれば，左辺または右辺が正則関数として存在する限り，任意の α, β, γ, z に対して (3.49) は成り立つ．さらに，右辺は一般に $z=1$ を分岐点としてもつので，1価正則とするために $1-z$ の偏角を $|\arg(1-z)|<\pi$ に制限しておく．

同じようにして，すでに求めた $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の $z=\infty$ における基本解による接

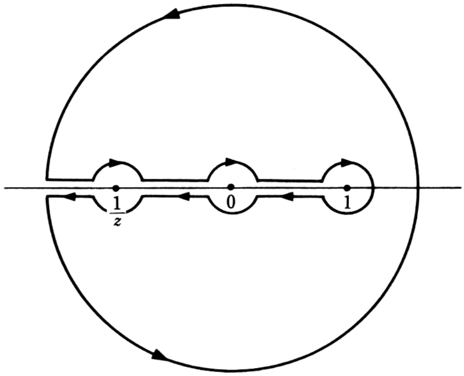


図 3.9

続公式 (3.19) も得られることを注意しておこう．この場合には $z<-1$ とし，積分路は図 3.8 の代わりに図 3.9 を用いればよい．

さて，$|z|<1$ において定義された超幾何級数 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ はメリン・バーネス積分 (3.21)，あるいはオイラー積分 (3.45) をとおして，1，∞を除く z-平面全体へ正則関数として解析接続された．この関数を**超幾何関数** (hypergeometric function) とよび，同じ記号 $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ で表す．超幾何関数の $z=1$ および∞の近傍における表現が (3.49) および (3.19) によって与えられるわけである．

3.4　超幾何微分方程式の他の解の解析接続

A. γ が整数でないとき，超幾何微分方程式 (3.1) は $z=0$ の近傍において

$$u_1^{(0)}(z)=F(\alpha,\beta,\gamma,z)$$
$$u_2^{(0)}(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)$$

を基本解としてもつ (定理 3.1)．$u_1^{(0)}(z)$ と $z=\infty$ の近傍における基本解との接続公式は (3.19) によって与えられている．これを書き直せば

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\ \frac{1}{z}\right) \tag{3.50}$$
$$(\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ \alpha-\beta\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ |\arg(-z)|<\pi)$$

となる．

そこで，$u_2^{(0)}(z)$ の解析接続を考える．(3.50) においてパラメータの置換

$$\alpha\to\alpha-\gamma+1,\quad \beta\to\beta-\gamma+1,\quad \gamma\to 2-\gamma$$

を施せば

$$F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)$$
$$=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}(-z)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha-\gamma+1,\alpha,\alpha-\beta+1,\frac{1}{z}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}(-z)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha+1,\frac{1}{z}\right)$$

したがって

$$z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)$$
$$=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}e^{\pi i(\gamma-1)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha-\gamma+1,\alpha,\alpha-\beta+1,\frac{1}{z}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}e^{\pi i(\gamma-1)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha+1,\frac{1}{z}\right) \tag{3.51}$$
$$(\gamma\neq 2,3,\cdots,\alpha-\beta\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots,|\arg(-z)|<\pi)$$

(3.50) と (3.51) によって，$z=0$ の近傍における基本解と，$z=\infty$ の近傍 ($|z|>1$) における基本解の間の接続公式が得られた．

B. つぎに $z=0$ の近傍における基本解と $z=1$ の近傍における基本解の間の接続公式を求めよう．$u_1^{(0)}(z)$ の接続公式は (3.49)（定理3.6）によって得られているが，ここでは公式 (3.50) から1次分数変換を利用することにより，(3.49) を導く方法を説明する．まず，変換 $\xi=z/(z-1)$ により1と∞を交換する．この交換によって微分方程式やその一般解はどのように移り変わるかは，リーマン P 関数を用いればわかりやすい．すなわち，第2章の補題2.1および補題2.2から

$$P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha, & z\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & \alpha & 0, & \xi\\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{Bmatrix}=(1-\xi)^{\alpha}P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha, & \xi\\ 1-\gamma & \beta-\alpha & \gamma-\beta & \end{Bmatrix}$$

が成り立つ．これと $z=0$ における展開を比較することにより

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-\xi)^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\xi)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}\right) \tag{3.52}$$

を得る．この式において $z\to 1-z$，$\gamma\to\alpha+\beta-\gamma+1$ を置き換えると

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z)=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,\frac{z-1}{z}\right) \tag{3.53}$$

さらに，$\alpha\to\gamma-\beta$，$\beta\to\gamma-\alpha$ とすると

$$F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z)=z^{\beta-\gamma}F\left(\gamma-\beta,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,\frac{z-1}{z}\right) \tag{3.54}$$

さて，$F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\xi)$ に対し，接続公式 (3.50) を適用し，$(1-\xi)^{\alpha}$ をかければ

$$
\begin{aligned}
&(1-\xi)^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\xi)\\
&\quad=(1-\xi)^{\alpha}(-\xi)^{-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,\frac{1}{\xi}\right)\\
&\qquad+(1-\xi)^{\alpha}(-\xi)^{\beta-\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}F\left(\gamma-\beta,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,\frac{1}{\xi}\right)
\end{aligned}
$$

$(1-\xi)^{\alpha}(-\xi)^{-\alpha}=z^{-\alpha}$，$(1-\xi)^{\alpha}(-\xi)^{\beta-\gamma}=z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ と（3.52)，(3.53)，(3.54）から（3.49）が得られる.

同様にして

$$
\begin{aligned}
&z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)\\
&\quad=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z) \qquad (3.55)\\
&\quad+\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z)\\
&\qquad(\gamma\neq 2,3,\cdots,\alpha+\beta-\gamma\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots,|\arg(1-z)|<\pi)
\end{aligned}
$$

も得られる.

C. いまパラメータ α, β, γ に対し，γ, $\gamma-\alpha-\beta$ および $\alpha-\beta$ は整数でない，すなわち，特異点 $0, 1, \infty$ における特性根の差が整数でないとする．このとき，定理3.1，定理3.2および定理3.3から超幾何微分方程式（3.1）は特異点 $z=0, 1, \infty$ の近傍において，それぞれ2個の解からなる基本解をもっている．基本解を横に並べた横ベクトルを

$$
\begin{aligned}
U^{(0)}(z)&=[u_1^{(0)}(z),u_2^{(0)}(z)]\\
U^{(1)}(z)&=[u_1^{(1)}(z),u_2^{(1)}(z)]\\
U^{(\infty)}(z)&=[u_1^{(\infty)}(z),u_2^{(\infty)}(z)]
\end{aligned}
$$

とおく．$z=j(j=0,1,\infty)$ の近傍で定義された $U^{(j)}(z)$ の各成分は，$z=k(k=0,1,\infty,k\neq j)$ の近傍へ解析接続したとき，$U^{(k)}(z)$ の成分の線形結合で表される．その係数からなる2-2行列を C_{jk} とすると

$$U^{(j)}(z)=U^{(k)}(z)C_{jk}\quad (j,k=0,1,\infty,j\neq k)$$

である．C_{jk} を接続行列（connection matrix）という.

すでに求めた接続公式（3.49)，(3.55）および（3.50)，(3.51）から

$$
C_{01}=\begin{bmatrix}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\\[2ex] \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}\end{bmatrix} \qquad (3.56)
$$

$$C_{0\infty}=\begin{bmatrix} \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{-\pi i\alpha} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}e^{\pi i(\gamma-\alpha-1)} \\ \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}e^{-\pi i\beta} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}e^{\pi i(\gamma-\beta-1)} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

が得られる．

3.5　モノドロミー群

一般に $a_1, a_2, \cdots, a_m$ を特異点とするフックス型微分方程式

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{3.58}$$

を考える．$a_j(j=1,2,\cdots,m)$ における特性根を λ_{j1}，λ_{j2} とし，その差が整数でないとしよう．このとき，a_j の近傍において

$$\begin{aligned} u_1{}^{(j)}(z)&=(z-a_j)^{\lambda_{j1}}\{1+b_1(z-a_j)+\cdots\} \\ u_2{}^{(j)}(z)&=(z-a_j)^{\lambda_{j2}}\{1+b_1'(z-a_j)+\cdots\} \end{aligned} \tag{3.59}$$

と表される基本解が存在する（定理2.5）．a_j から a_k に到る曲線を L_{jk} とし，L_{jk} 上には両端を除いて特異点は現れないものとする．a_j の近傍での基本解は L_{jk} に沿って a_k の近くまで解析接続したとき，a_k の近傍での基本解

$$u_1{}^{(k)}(z),\quad u_2{}^{(k)}(z)$$

の線形結合で表される．その係数からなる2-2行列を C_{jk} とすると

$$[u_1{}^{(j)}(z), u_2{}^{(j)}(z)]=[u_1{}^{(k)}(z), u_2{}^{(k)}(z)]C_{ik}$$

とかける．C_{jk} を接続行列，C_{jk} の成分を**接続係数**とよび，C_{jk} を求めることを**接続問題**という．

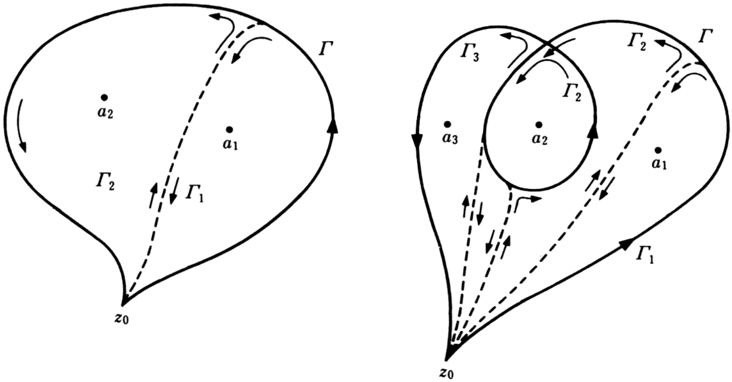
いま，$z_0\neq a_1, a_2, \cdots, a_m$ とし，z_0 において正則で互いに線形独立な解 $u_1(z)$ と $u_2(z)$ を成分とする横ベクトルを $U(z)$ とする．微分方程式（3.58）の係数 $p(z)$，$q(z)$ は有理関数で1価であっても，たとえば（3.59）をみればわかるように，a_j のまわりを正の向きに1回り解析接続すれば，$u_1{}^{(j)}(z)$ は $e^{2\pi i\lambda_{j1}}u_1{}^{(j)}(z)$，$u_2{}^{(j)}(z)$ は $e^{2\pi i\lambda_{j2}}u_2{}^{(j)}(z)$ となるから，$U(z)$ は一般には無限多価である．この無限多価性を知るには，複素平面から $a_1, a_2, \cdots, a_m$ をとり除いた領域を Δ とし，z_0 から z_0 に戻る Δ 内の任意の閉曲線 Γ に沿って解析接続したとき，$U(z)$ がどのような変換をうけるかがわかればよい．解の解析接続はやはり解であるから，Γ に沿って $U(z)$ を解析接続した分枝を $U(z,\Gamma)$ で表せば

$$U(z,\Gamma)=U(z)C(\Gamma),\qquad C(\Gamma)\text{ は 2-2 定数行列}$$

とかける．$C(\Gamma)$ は Γ に沿った**変換行列**といわれる．

Γ_j を z_0 から出て a_j のまわりを正の向きに1周して z_0 にもどる閉曲線で，Γ_j の上には特異点はなく，また Γ_j の内部には a_j 以外には特異点を含まないようにとる．Γ_j を z_0 を始点とし a_j を回る回路とよび，$C_j=C(\Gamma_\gamma)$ を回路行列ということにしよう．Δ 内の閉曲線 Γ は Δ 内で連続的に変形しても変換行列は不変であり，また Γ は $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ を適当な順序に重複を許してつないだ道に変形できる．

例 3.3　図3.10で与えられる閉曲線 Γ は破線で示された道を補ってみると，いくつかの回路をつないだ曲線に変形できることがわかる．このとき，Γ に沿った変換行列は



(1) $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$　　(2) $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_2+\Gamma_3$

図 3.10

（1）　$U(z,\Gamma)=U(z,\Gamma_1+\Gamma_2)=U(z,\Gamma_2)C(\Gamma_1)=U(z)C(\Gamma_2)C(\Gamma_1)$

$$\therefore\quad C(\Gamma)=C_2C_1$$

（2）　$U(z,\Gamma)=U(z,\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_2+\Gamma_3)=U(z)C(\Gamma_3)C(\Gamma_2)C(\Gamma_2)C(\Gamma_1)$

$$\therefore\quad C(\Gamma)=C_3C_2{}^2C_1$$

で与えられる．

この例3.3からもわかるように，任意の Γ に沿った変換行列は回路行列の積で与えられる．z_0 と z_0 を結ぶ2つの閉曲線 Γ と Γ' を結ぶと，これも z_0 と z_0 を結ぶ閉曲線である．これを $\Gamma+\Gamma'$ とかけば

$$U(z,\Gamma+\Gamma')=U(z,\Gamma')C(\Gamma)=U(z)C(\Gamma')C(\Gamma)$$

であるから

$$C(\Gamma+\Gamma')=C(\Gamma')\cdot C(\Gamma)$$

である．すなわち，変換行列の積は変換行列となる．このような変換行列で表される線形変換全体は代数学でいうところの群となる．この群を微分方程式 (3.58) の**モノドロミー群** (monodromy group) という．任意の $C(\Gamma)$ は $C_1, C_2, \cdots, C_m$ の積として表されるから，$C_1, C_2, \cdots, C_m$ はモノドロミー群の生成元である．

モノドロミー群は z_0, および基本解のとり方に依存する．$V(z)$ をもう1つの基本解とすると，定理2.3および定理2.4から正則行列 P が存在し，$V(z)=U(z)P$ とかくことができる．したがって

$$V(z,\Gamma)=U(z,\Gamma)P=U(z)C(\Gamma)P=V(z)P^{-1}C(\Gamma)P$$

となり，$V(z)$ の Γ に沿った変換行列は $P^{-1}C(\Gamma)P$ である．$U(z), V(z)$ から作られるモノドロミー群を $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ とすると $\mathscr{H}=P^{-1}\mathscr{G}P$ が成り立ち，このことを群として同型であるという．

そこで z_0 を a_1 に十分近い点にとり，$U^{(1)}(z)=[u_1{}^{(1)}(z),\ u_2{}^{(1)}(2)]$ とする，また Γ_j としては，z_0 から a_j に近い点 z_j まで進み，a_j を正の向きに1回りして z_j から z_0 に戻る道とする (図3.11).

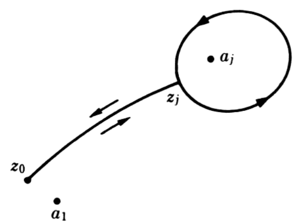


図 3.11　Γ_j

a_j の近傍における基本解を成分とする横ベクトル $U^{(j)}(z)=[u_1{}^{(j)}(z),\ u_2{}^{(j)}(z)]$ は，z が a_j の近傍内で正の向きに1回りすれば $U^{(j)}(z)\Lambda_j$ となる．ここで

$$\Lambda_j=\begin{bmatrix} e^{2\pi i\lambda_{j1}} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda_{j2}} \end{bmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

である．したがって，$U^{(1)}(z)$ を Γ_j に沿って解析接続したとき，まず z_j に達したとき接続行列 C_{1j} を用いて

$$U^{(1)}(z)=U^{(j)}(z)C_{1j}$$

となり，a_j を1回りした後は $U^{(j)}(z)\Lambda_jC_{1j}$, さらに z_j から z_0 にもどれば $U^{(1)}(z)C_{1j}{}^{-1}\Lambda_jC_{1j}$ となる．ゆえに Γ_j に沿った回路行列 C_j は

$$C_j=C_{1j}{}^{-1}\Lambda_jC_{1j} \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

で与えられる．特に $j=1$ の場合，C_{11} は単位行列としてよいから，$C_1=\Lambda_1$ である．以上のことから，モノドロミー群の生成元は接続行列 $C_{1j}(j=2,\cdots,m)$ が求まれば得られることになる．

超幾何微分方程式の場合には接続行列 $C_{01}, C_{0\infty}$ が得られているから，モノドロ

ミー群の生成元はつぎの式で計算される.

$$C_0=\Lambda_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i(1-\gamma)}\end{bmatrix}$$

$$C_1=C_{01}{}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\end{bmatrix}C_{01} \tag{3.60}$$

$$C_2=C_{0\infty}{}^{-1}\begin{bmatrix}e^{2\pi i\alpha} & 0\\ 0 & e^{2\pi i\beta}\end{bmatrix}C_{0\infty}$$

ここで，C_{01}，$C_{0\infty}$ は（3.56)，（3.57）で与えられる行列である.

3.6　ルジャンドルの関数とルジャンドルの陪関数

ヘルムホルツ（H. Helmholtz，1821–1894）の方程式やシュレディンガー（E. Schrödinger，1887–1961）の方程式を極座標で表し，変数分離の方法で解を求めようとすると，つぎの形の微分方程式が現れる.

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right\}w=0\quad(\mu,\nu\text{は定数}) \tag{3.61}$$

特に $\mu=0$ とおいた微分方程式

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\nu(\nu+1)w=0 \tag{3.62}$$

を**ルジャンドル**（A. M. Legendre，1752–1833）**の微分方程式**といい，その解は**ルジャンドル関数**（Legendre function）とよばれる．また，(3.61）は**ルジャンドルの陪微分方程式**，その解を一般化された**ルジャンドルの陪関数**という.

A. ルジャンドルの微分方程式 (3.62) は 3 個の確定特異点± 1，∞をもつ．特性方程式はそれぞれ $\rho^2=0(z=\pm1)$，$\rho(\rho-1)-\nu(\nu+1)=0(z=\infty)$ であるから，特性根は $z=\pm1$ で 0（重根)，$z=\infty$で $-\nu,\nu+1$ である．したがって，(3.62）の一般解はリーマンの P 関数を用いて

$$P\begin{Bmatrix}-1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+1, & z\\ 0 & 0 & -\nu & \end{Bmatrix}$$

と表される．$\xi=(1-z)/2$ と変換すれば

$$P\begin{Bmatrix}-1 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+1, & z\\ 0 & 0 & -\nu & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+1, & \xi=\dfrac{1-z}{2}\\ 0 & 0 & -\nu & \end{Bmatrix}$$

となり，$\xi=0(z=1)$ の近傍における解は1つは定数項から始まる $\xi=(1-z)/2$ のべき級数であり，他の1つは $\log\xi=\log(1-z)/2$ を含む項が現れる．前者の定数項1から始まるべき級数解

$$P_\nu(z)=F\left(\nu+1,\ -\nu,\ 1,\ \frac{1-z}{2}\right)$$
$$=1-\frac{\nu(\nu+1)(1-z)}{2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu+1)(\nu+2)}{(2!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^2-\cdots \tag{3.63}$$

を第1種ルジャンドル関数とよぶ．

超幾何関数は最初の2つのパラメータに関して対称的であることから，ν を $-\nu-1$ とおいても関数は不変である．したがって

$$P_\nu(z)=P_{-\nu-1}(z)$$

が成り立つ．また，ν が0または正整数 n の場合，$P_n(z)$ は n 次の多項式となる．このとき $P_n(z)$ を**ルジャンドルの多項式**（Legendre's polynomial）という．たとえば

$$P_0(z)=1,\quad P_1(z)=z,\quad P_2(z)=\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2},\quad P_3(z)=\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z$$

$$P_4(z)=\frac{35}{8}z^4-\frac{15}{4}z^2+\frac{3}{8},\quad P_5(z)=\frac{63}{8}z^5-\frac{35}{4}z^3+\frac{15}{8}z,\cdots$$

また，ルジャンドルの多項式 $P_n(z)$ は

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n \quad \textbf{（ロドリゲスの公式）} \tag{3.64}$$

とかくこともできる．これは $w=(z^2-1)^n$ とおくと，$(z^2-1)w'=2nzw$. 両辺を $n+1$ 回微分すると

$$(z^2-1)w^{(n+2)}+(n+1)2zw^{(n+1)}+(n+1)nw^{(n)}=2n\{zw^{(n+1)}+(n+1)w^{(n)}\}$$

よって

$$(z^2-1)w^{(n+2)}+2zw^{(n+1)}-n(n+1)w^{(n)}=0$$

この式を $2^n n!$ で割り，$\tilde{P}_n(z)=w^{(n)}/2^n n!$ とおけば，$\tilde{P}_n(z)$ はルジャンドルの微分方程式（3.62）（$\nu=n$）をみたす n 次多項式で，かつ z^n の係数は $(2n)!/2^n(n!)^2$ であることから $\tilde{P}_n(z)=P_n(z)$ が成り立つことがわかる．

ここで，$P_n(z)$ の簡単な性質を述べておこう．（3.64）から

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}z^{2n-2s}$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{s=0}^{s\leqq n/2}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!}z^{n-2s}$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}z^nF\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2},\frac{1-2n}{2},\frac{1}{z^2}\right)$$

と表される．上の式から

（ i ）　$P_n(-z)=(-1)^nP_n(z)$

すなわち偶数次のものは偶関数，奇数次のものは奇関数である．

（ii）　$P_{2m+1}(0)=0$

$$P_{2m}(0)=(-1)^m\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}=(-1)^m\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2m}$$

（iii）　$P_n(z)$ は -1 と 1 の間に n 個の相異なる零点をもつ．これは $g(x)=(x^2-1)^n$ とおけば，$g(x)$ は $x=-1,1$ において n 重根をもつ．微分積分学のロルの定理から $g'(x)$ は -1 と 1 の間に零点 ξ をもつ．$g'(x)$ は $x=-1$ と 1 において $n-1$ 重根，そして ξ において零点をもつ．再びロルの定理から $g''(x)$ は $x=-1$ と ξ の間，および ξ と 1 の間に零点をもつ．以下ロルの定理をくり返し用いることにより，$g^{(n)}(x)$ は n 個の相異なる零点をもつことが示される．

（iv）　$$\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx=\begin{cases}0 & (k=0,1,2,\cdots,n-1)\\ \dfrac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} & (k=n)\end{cases}$$

これは部分積分をくり返し用いることにより得られる．$P_n(x)$ は n 次多項式で x^n の係数は $(2n)!/2^n(n!)^2$ であることから

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n)\end{cases}\tag{3.65}$$

が成り立つ．このことから，多項式系

$$\left\{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}P_n(x)\right\}\text{ は区間 }[-1,1]\text{ で正規直交系をつくる}$$

B.　つぎに (3.61) の解，一般化されたルジャンドルの陪関数を考えよう．

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left\{\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right\}w=0\tag{3.61}$$

$z=\pm 1$ および $z=\infty$ が確定特異点であり，特性方程式は

$$\frac{-2z}{1-z^2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\frac{-\mu^2}{(1-z^2)^2}=-\frac{\mu^2}{4}\left\{\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}\right\}$$

と変形してみれば

$$\rho(\rho-1)+\rho-\frac{\mu^2}{4}=0\quad(z=\pm 1),\quad \rho(\rho-1)+(2-z)\rho-\nu(\nu+1)=0\quad(z=\infty)$$

となり，特性根は $\pm\frac{\mu}{2}$ $(z=\pm 1)$，$\nu+1$，$-\nu$ $(z=\infty)$ である．したがって，一般解はリーマンの P 関数を用いて

$$w=P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & \nu+1, & z \\ -\frac{\mu}{2} & -\frac{\mu}{2} & -\nu & \end{Bmatrix} \tag{3.66}$$

と表される．

リーマンの P 関数 (3.62) は補題 2.1 および 2.2 を用いて

$$w=P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & \nu+1, & z \\ -\frac{\mu}{2} & -\frac{\mu}{2} & -\nu & \end{Bmatrix}=(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+\mu+1, & \frac{1-z}{2} \\ -\mu & -\mu & -\nu+\mu & \end{Bmatrix}$$

さらに

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+\mu+1, & \frac{1-z}{2} \\ -\mu & -\mu & -\nu+\mu & \end{Bmatrix}=\left(\frac{1-z}{2}\right)^{-\mu}P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+1, & \frac{1-z}{2} \\ \mu & -\mu & -\nu & \end{Bmatrix} \tag{3.67}$$

と変形できるから，(3.61) の解として $\mu\neq 0$ のとき

$$P_\nu{}^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2}F\left(\nu+1,\ -\nu,\ 1-\mu,\ \frac{1-z}{2}\right) \tag{3.68}$$

をとる．$P_\nu{}^\mu(z)$ を一般化された第1種ルジャンドルの陪関数とよび，ν を次数，μ を位数という．ここで $\mu/2$乗は $-1<z<1$ のとき $\arg[(1+z)/(1-z)]^{\mu/2}=0$ である分枝をとるものとする．$\mu=0$ のときは第1種ルジャンドル関数 (3.63) と一致する．μ が正の整数 m の場合を考えよう．

$$\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}=\frac{\Gamma(\mu)\text{siu } \pi\mu}{\pi}$$

$$\lim_{\mu\to m}\frac{1}{\Gamma(1-\mu)(m-\mu)}=\lim_{\mu\to m}\frac{\Gamma(\mu)\sin\pi\mu}{\pi(m-\mu)}=(-1)^{m+1}\Gamma(m)$$

および

$$\frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+m-1)(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}{(1-m)(2-m)\cdots(-1)}=\frac{-\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(m)}$$

に注意すれば

$$P_\nu{}^m(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^m\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1)}$$

$$F\left(\nu+m+1, m-\nu, m+1, \frac{1-z}{2}\right)$$

$$=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu+m+1)(1-z^2)^{m/2}}{m!\,2^m\Gamma(\nu-m+1)}F\left(\nu+m+1, m-\nu, m+1, \frac{1-z}{2}\right) \tag{3.69}$$

とかくことができる．また

$$P_\nu{}^{[m]}(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,2^m\Gamma(\nu-m+1)}F\left(\nu+m+1, m-\nu, m+1, \frac{1-z}{2}\right)$$

とおくと，$P_\nu{}^{[m]}(z)$ は第 1 種ルジャンドル関数 $P_\nu(z)$ を m 回微分して得られる．それは

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n\right\}$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{n!(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n)}z^n$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z)$$

であるから，これを m 回行えば

$$\frac{d^m}{dz^m}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)}$$

$$F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+m,z)$$

したがって

$$\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z)=\frac{d^m}{dz^m}F\left(\nu+1, -\nu, 1, \frac{1-z}{2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^m\frac{(\nu+1)\cdots(\nu+m)(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+m-1)}{m!}$$

$$F\left(\nu+m+1, -\nu+m, 1+m, \frac{1-z}{2}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2^m\Gamma(\nu-m+1)\Gamma(m+1)}F\left(\nu+m+1, -\nu+m, 1+m, \frac{1-z}{2}\right)$$
$$=P_\nu{}^{[m]}(z)$$

したがって

$$P_\nu{}^m(z)=(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z) \tag{3.70}$$

を得る．またリーマンの P 関数の性質

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+m+1, & \frac{1-z}{2} \\ -m & -m & -\nu+m & \end{Bmatrix}=\left(\frac{1+z}{2}\right)^{-m}P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \nu+1, & \frac{1-z}{2} \\ -m & m & -\nu & \end{Bmatrix}$$

に注意して，(3.69) から

$$P_\nu{}^m(z)=\frac{(-1)^m\Gamma(\nu+m+1)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m}{2}}F\left(\nu+1, -\nu, 1+m, \frac{1-z}{2}\right) \tag{3.71}$$

とかくことができる．一方，$\mu=-m$ のときは (3.68) から

$$P_\nu{}^{-m}(z)=\frac{1}{m!}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{-\frac{m}{2}}F\left(\nu+1, -\nu, 1+m, \frac{1-z}{2}\right)$$

よって，つぎの関係式が成り立つ．

$$P_\nu{}^{-m}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu{}^m(z) \tag{3.72}$$

(3.70) に対応して

$$P_\nu{}^{-m}(z)=(-1)^m(1-z^2)^{-\frac{m}{2}}\underbrace{\int_1^z\cdots\int_1^z}_{m}P_\nu(z)dz \tag{3.73}$$

とかけることを示そう．(3.68) から

$$P_\nu{}^{-m}(z)=\frac{1}{m!}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{-\frac{m}{2}}F\left(\nu+1, -\nu, 1+m, \frac{1-z}{2}\right)$$

ところが m 回項別積分をしてみれば

$$F\left(\nu+1, -\nu, 1+m, \frac{1-z}{2}\right)=m!\,(1-z)^{-m}\underbrace{\int_1^z\cdots\int_1^z}_{m}F\left(\nu+1, -\nu, 1, \frac{1-z}{2}\right)(dz)^m$$

が成り立つので，(3.73) が示されたことになる．

ルジャンドルの陪関数 $P_\nu{}^\mu(z)$ は次数 ν および位数 μ が正の整数のとき，ロドリゲスの公式 (3.64) と (3.70)，(3.72)，(3.73) からつぎの直交関係が成り立

つ．すなわち $n \geqq m$, $l \geqq k$ とし

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^m(x) P_l{}^k(x) dx$$

$$= \frac{(-1)^m (n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^{1} P_n{}^{-m}(x) P_l{}^k(x) dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{l+m} n! l!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^{\frac{k-m}{2}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n \frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}} (x^2-1)^l dx$$

ここで，部分積分をくり返し行うことにより

$$= \frac{1}{2^{l+n} n! l!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ (x^2-1)^{\frac{k-m}{2}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2-1)^n \right\} \frac{d^{k-m+l}}{dx^{k-m+l}} (x^2-1)^l dx$$

となり，もし $k>m$ ならば部分積分により，積分は 0 となる．また，$k<m$ の場合も同様に 0 となることがわかる．したがって

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^m(x) P_l{}^m(x) dx$$

$$= \frac{1}{2^{n+l} n! l!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l dx$$

$$= \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_l(x) dx \tag{3.74}$$

$$= \begin{cases} 0 & (n \neq l) \\ \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} \dfrac{2}{2n+1} & (n=l) \end{cases}$$

を得る．ここで (3.65) を用いた．(3.65) と (3.74) を合わせてつぎの**直交関係式**が導かれた．

定理 3.7

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_l(x) dx = \delta_{nl} \frac{2}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{1} P_n{}^m(x) P_l{}^m(x) dx = \delta_{nl} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \tag{3.75}$$

3.7　例題．超幾何関数のいくつかの公式

A. $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の $z=0,1$ における値は，まず定義（3.4）から

$$F(\alpha,\beta,\gamma,0)=1$$

また，$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$ ならば，接続公式（3.49）から

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

となる．$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)<0$ のときは $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ は無限大となり，その主部は

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$$

である．

B. 微分公式（3.4）の右辺を項別微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}nz^{n-1}\\&=\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)z^{n-1}}{(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)(n-1)!}\\&=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z)\end{aligned}$$

このような微分をくり返して

$$\frac{d^kF(\alpha,\beta,\gamma,z)}{dz^k}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}F(\alpha+k,\beta+k,\gamma+k,z) \tag{3.76}$$

が得られる．したがって，超幾何関数は何回微分しても超幾何関数となる．

C. つぎに超幾何関数は変数 z のほかにパラメータとして α,β,γ をもっている．$F(\alpha\pm1,\beta,\gamma,z)$，$F(\alpha,\beta\pm1,\gamma,z)$，$F(\alpha,\beta,\gamma\pm1,z)$ を $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ の**近接関数** (contiguous functions) といい，これらと導関数を含めた関数の間の関係式を**近接関係**（contiguous relation）という．2, 3 の公式を上げておこう．級数から簡単な計算により

$$\begin{aligned}F(\alpha+1,\beta,\gamma,z)-F(\alpha,\beta,\gamma,z)&=\frac{\beta}{\gamma}zF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z)\\F(\alpha,\beta+1,\gamma,z)-F(\alpha,\beta,\gamma,z)&=\frac{\alpha}{\gamma}zF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z)\end{aligned} \tag{3.77}$$

両式を引き算すると

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma,z)-F(\alpha,\beta+1,\gamma,z)=\frac{\beta-\alpha}{\gamma}zF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z) \quad (3.78)$$

が得られる．また

$$F(\alpha,\beta,\gamma+1,z)=\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}F(\alpha,\beta,\gamma,z)-\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z) \quad (3.79)$$

が成り立つ．したがって，(3.75) と (3.77)，(3.79) から

$$\begin{aligned}F(\alpha+1,\beta,\gamma,z)&=F(\alpha,\beta,\gamma,z)+\frac{z}{\alpha}\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)\\F(\alpha,\beta+1,\gamma,z)&=F(\alpha,\beta,\gamma,z)+\frac{z}{\beta}\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)\\F(\alpha,\beta,\gamma+1,z)&=\frac{\gamma}{\gamma-\alpha}F(\alpha,\beta,\gamma,z)-\frac{\gamma}{\beta(\gamma-\alpha)}\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)\end{aligned} \quad (3.80)$$

などが得られる．近接関係式は積分表示 (3.45) を用いても得られる．たとえば，積分記号下で微分すると，(3.45) の積分の項は

$$\frac{d}{dz}(1-sz)^{-\beta}=\beta s(1-sz)^{-\beta-1}$$

$$\begin{aligned}&\beta\int_C^{(1+,0+,1-,0-)}s^{\alpha}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}(1-sz)^{-\beta-1}ds\\&=\beta\int_C^{(1+,0+,1-,0-)}s^{(\alpha+1)-1}(1-s)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1}(1-sz)^{-\beta-1}ds\end{aligned}$$

これと $F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z)$ の積分表示を比較し

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\\&=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}}\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}\end{aligned}$$

に注意すれば，(3.75)

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,z)$$

が得られる．

第4章　合流型超幾何微分方程式

確定特異点を3つもつ2階線形微分方程式は独立変数zの1次分数変換によって，任意の点に移すことができるが，とくに標準型として$\{0, 1, \infty\}$にとった方程式が超幾何微分方程式であった．この3点の中の2点$(1, \infty)$を1つの特異点∞に合流させることによって，合流型超幾何微分方程式が得られる．このとき，$z=\infty$はもはや確定特異点ではなくて不確定特異点となる．本章ではこの方程式の1つの解である合流型超幾何関数の基本的な性質，およびzが不確定特異点∞に近づくときの漸近展開などについて説明する．また，ホイッティカーの関数，ラゲールの関数についても述べる．

4.1　合流型超幾何関数

A. 超幾何微分方程式 (3.1)

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2}+\{-\gamma+(1+\alpha+\beta)z\}\frac{du}{dz}+\alpha\beta u=0$$

において，$z=\zeta/\beta$とおけば

$$\zeta\left(\frac{\zeta}{\beta}-1\right)\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left\{-\gamma+(1+\alpha+\beta)\frac{\zeta}{\beta}\right\}\frac{du}{d\zeta}+\alpha u=0$$

となる．この方程式は$\{0, \beta, \infty\}$を確定特異点としてもつ．ここで，$\beta\to\infty$とすると（独立変数をzにもどして）

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{du}{dz}-\alpha u=0 \tag{4.1}$$

が得られる．(4.1) が**合流型超幾何微分方程式** (confluent hypergeometric differential equation) である．これは$z=0$を確定特異点，$z=\infty$を不確定特異点としてもつ．

さて，微分方程式 (4.1) の確定特異点$z=0$における特性根は0と$1-\gamma$であるから，一般には1から始まるべき級数解と$z^{1-\gamma}$から始まるべき級数解があるはずである．これらはたとえば未定係数法により求めることもできるが，前に得た超幾何微分方程式の解から，zの代わりにz/βとおき$\beta\to\infty$としても求められる．

$\gamma \neq 0, -1, -2, \cdots$ のとき

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\beta}\right)=1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}\frac{z}{\beta}$$
$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\left(\frac{z}{\beta}\right)^n+\cdots$$

であるから，$\beta\to\infty$ として

$$u_1(z)=\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\beta}\right)$$
$$=1+\frac{\alpha}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n+\cdots \tag{4.2}$$

を得る．級数 (4.2) の収束半径は∞であるから，$u_1(z)$ は $|z|<\infty$ において (4.1) の解である．級数 (4.2) を合流型超幾何級数，または**合流型超幾何関数** (hypergeometric function of confluent type) といい，$F(\alpha, \gamma, z)$ で表す．

微分方程式 (4.1) のもう 1 つの解は，$\gamma \neq 2, 3, \cdots$ のとき，$z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$ に対応して，つぎの級数で与えられる．

$$u_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z)$$
$$=z^{1-\gamma}\left\{1+\frac{\alpha-\gamma+1}{2-\gamma}z+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)}{2!(2-\gamma)(3-\gamma)}z^2\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(\alpha-\gamma+1)\cdots(\alpha-\gamma+n-1)}{n!(2-\gamma)(3-\gamma)\cdots(n+1-\gamma)}z^n+\cdots\right\} \tag{4.3}$$

定理 4.1 γ は整数でないとする．合流型超幾何微分方程式 (4.1) の基本解は

$$\begin{aligned} u_1(z)&=F(\alpha, \gamma, z) \\ u_2(z)&=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z) \end{aligned} \tag{4.4}$$

で与えられる．

$\gamma=1$ ならば $u_1(z)=u_2(z)$，また $\gamma=0, -1, -2, \cdots$ ならば $u_1(z)$ が，そして $\gamma=2, 3, 4, \cdots$ ならば $u_2(z)$ が意味を失う．超幾何微分方程式の場合と同様に γ が整数の場合は，パラメータに関する微分から他の線形独立な解が得られる．$\gamma=1, 2, \cdots$ の場合のみ結果をかいておく．γ が 0 または負の整数の場合は，$u=z^{1-\gamma}\tilde{u}$ は方程式 (4.1) において $\alpha\to(\alpha-\gamma+1)$，$\gamma\to(2-\gamma)$ とおきかえた方程式をみたすから，γ が正の整数の場合に帰着される．

（i）　$\gamma=1$ の場合

$$u_1(z)=F(\alpha,1,z)$$

$$u_2(z)=F(\alpha,1,z)\log z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(n!)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha+k}-\frac{1}{1+k}\right)\right\}z^n \tag{4.5}$$

（ii）　$\gamma=m+1$ の場合

$$\begin{aligned}u_2(z)=&F(\alpha,m+1,z)\log z\\&+(-1)^{m+1}m!\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^n(m-n-1)z^{n-m}}{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+n)}\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!(m+1)\cdots(m+n)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha+k}-\frac{1}{m+k+1}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}z^n\end{aligned} \tag{4.6}$$

B.　微分方程式（4.1）よりやや一般な微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left(a+\frac{b}{z}\right)\frac{dw}{dz}+\left(c+\frac{d}{z}+\frac{e}{z^2}\right)w=0$$

は適当な変換により，（4.1）の形の微分方程式に帰着できることを注意しておこう

$$w=z^qe^{pz}v$$

とおく．

$$\frac{dw}{dz}=\left[\frac{dv}{dz}+\left(p+\frac{q}{z}\right)v\right]z^qe^{pz}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\left[\frac{d^2v}{dz^2}+2\left(p+\frac{q}{z}\right)\frac{dv}{dz}+\left\{\left(p+\frac{q}{z}\right)^2-\frac{q}{z^2}\right\}v\right]z^qe^{pz}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\frac{d^2v}{dz^2}+\left\{2p+a+\frac{2q+b}{z}\right\}\frac{dv}{dz}\\&\qquad+\left\{p^2ap+c+\frac{2pq+aq+bp+d}{z}+\frac{q^2-q+bq+e}{z^2}\right\}v=0\end{aligned}$$

となる．そこで，p と q を

$$p^2+ap+c=0,\quad q^2+(b-1)q+e=0$$

をみたすように選び，さらに

$$\zeta=-(2p+a)z$$

とおけば

$$\frac{d^2v}{d\zeta^2}+\left(\frac{2q+b}{\zeta}-1\right)\frac{dv}{d\zeta}-\frac{2pq+aq+bp+d}{(2p+a)\zeta}v=0$$

と変形できるからである．

4.2　積分表示

A. 微分方程式（4.1）の係数は z の 1 次式であるから，解は**ラプラス積分**（Laplace integral）で表示される．

$$u=\int_C f(s)e^{zs}ds \tag{4.7}$$

とおき，$f(s)$ と積分路 C を適当に定める．

$$L[u]=z\frac{d^2u}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{du}{dz}-\alpha u$$

とおき，（4.6）を代入する．積分記号下で微分すると

$$L[u]=\int_C[z(s^2-s)+(\gamma s-\alpha)]f(s)e^{zs}ds$$

となる．部分積分により括弧内の z を消去すると

$$L[u]=[s(s-1)f(s)e^{zs}]_C+\int_C\left[\frac{d}{ds}\{(s-s^2)f(s)\}+(\gamma s-\alpha)f(s)\right]e^{zs}ds$$

を得る．ただし，右辺第 1 項 $[\ ]_C$ は $[\ ]$ の中の関数の C の終点における値と始点における値の差である．$L[u]=0$ となるためには，まず関数 $f(s)$ を

$$\frac{d}{ds}\{s(1-s)f(s)\}+(\gamma s-\alpha)f(s)=0$$

によって定め，また積分路 C を

$$[s(s-1)f(s)e^{zs}]_C=0$$

をみたすように選べばよい．上の微分方程式を解けば

$$f(s)=As^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}\quad (A\text{は積分定数})$$

を得る．このとき C に対する条件は

$$[s(s-1)f(s)e^{zs}]_C=[s^\alpha(1-s)^{\gamma-\alpha}e^{zs}]_C=0 \tag{4.8}$$

となる．したがって，（4.1）の解として

$$u(z)=A\int_C s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds \tag{4.9}$$

を得る．

Re $\alpha>0$，Re$(\gamma-\alpha)>0$ の場合には C として 0 と 1 を結ぶ線分をとれば，

(4.9) がみたされる．(4.9) において

$$e^{zs}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zs)^n}{n!}$$

とおいて項別積分すると，z のべき級数解

$$u(z)=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_0^1 s^{n+\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}ds$$

が得られる．ここで，ベータ関数とガンマ関数の公式 (7.4)，(7.5) を用いると

$$\begin{aligned}u(z)&=A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{n!\Gamma(n+\gamma)}z^n\\&=A\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n\end{aligned}$$

となる．

ここで，合流型超幾何級数 (4.3) と比較することにより，つぎの定理が導かれた．

定理 4.2　合流型超幾何級数 $F(\alpha,\gamma,z)$ は $\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0$ のときラプラス積分による表示

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds \qquad (4.10)$$

をもつ．

つぎに $\mathrm{Re}\,\alpha>0$，$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0$ がみたされない場合を考えよう．今度は (3.44) を定義したときの積分路図 3.3，図 3.4 と同じものをとればよい．すなわち，図 4.1 に示すように，実軸上 0 と 1 との間の 1 点 A から $\arg s=\arg(1-s)=0$ で出発し，1，0 を正の向きに，続いて 1，0 を負の向きに 1 周する路をとり

$$P(\alpha,\gamma,z)=\int_C^{(1_+0_+1_-0_-)}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds$$

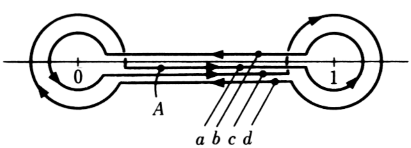


図 4.1　$F(\alpha,\gamma,z)$ の積分路

とおく．C のとり方が適していること，および $F(\alpha,\gamma)$ と $P(\alpha,\gamma)$ との関係はちょうど（3.44）から（3.45）を導いた方法と全く同様にして得られる．

定理 4.3　合流型超幾何級数 $F(\alpha,\gamma,z)$ は $\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$ であるとき

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

$$\int_C^{(1_+0_+1_-0_-)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds \tag{4.11}$$

が成り立つ．

B. 積分路の条件（4.8）をみたす道としては上の C の他に，図 4.2 に示すように，$\mathrm{Re}(zs)$ が $-\infty$ であるような方向の無限遠から出発して，0 または 1 を正の向きに 1 周して再び同じ方向の無限遠にもどる道 C_1，C_2 をとることができる．

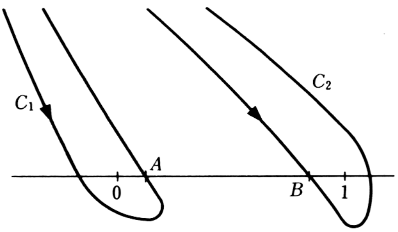


図 4.2　C_1 と C_2

ここで，被積分関数は一般に $0, 1, \infty$ を分岐点とする多価関数であるので，その分岐を明確にしておく必要がある．そのために，C_1 と C_2 が実軸上の 0 と 1 の間を横切る点 A，B において，それぞれ $\arg s=0$，$\arg(1-s)=0$ と定めておく．そこで，$\arg z=0$ とおいて，s が C_1 と C_2 を描くとき，$\arg s$ および $\arg(1-s)$ の変化を調べよう．まず，C_1 は $\arg s=\nu$ の方向の無限遠から出て $s=0$ をまわり，再び $\arg s=\nu$ の方向の無限遠に帰る道であるが，$\mathrm{Re}\, zs$ が $-\infty$ となる方向であるから

$$-\frac{3\pi}{2}<\theta+\nu<-\frac{\pi}{2},\quad たとえば\ \theta+\nu=-\pi$$

また，点 A で $\arg s=0$ であるから

$$\nu<0<\nu+2\pi,\quad すなわち\ -2\pi<\nu<0$$

でなければならない．このような ν がとれるためには，$\arg z=\theta$ は

$$-\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$$

の範囲にあればよい．したがって，C_1 に沿って $\arg s$ は $-\frac{3}{2}\pi-\theta<\nu<-\frac{\pi}{2}-\theta$ の方向，たとえば $\nu=-\pi-\theta$ の方向の無限遠から出て，増加して $\pi-\theta$ の方向の無限遠に戻っていく．このとき，$\arg(1-s)$ は $-\theta$ から増加したのち減少して $-\theta$ にもどるものとする．同様に C_2 に対しては

$$\frac{\pi}{2}<\theta+\nu<\frac{3\pi}{2},\quad \text{たとえば}\ \theta+\nu=\pi$$

また，点 B で $\arg(1-s)=0$ であるから

$$\nu-\pi<0<\nu+\pi$$

でなければならない．このような ν がとれるためには

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{2}\pi$$

ならばよい．以上をまとめて，積分路 C_1，C_2 に沿っての $\arg s$，$\arg(1-s)$ の変化，および $\arg z$ の範囲を表にまとめておく．

	C_1	C_2
$\arg s$	$-\pi-\theta\to\pi-\theta$	$\pi-\theta\to\pi-\theta$
$\arg(1-s)$	$-\theta\to-\theta$	$-\theta\to2\pi-\theta$
$\arg z=\theta$	$-\frac{3\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5\pi}{2}$

そこで

$$G_1(\alpha,\gamma,z)=\frac{2}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds \tag{4.12}$$

$$G_2(\alpha,\gamma,z)=\frac{2}{1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_2}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds \tag{4.13}$$

とおけば，これも (4.1) の解である．これらと $F(\alpha,\gamma,z)$ との関係を求めよう．そのため，(4.11) の積分路（図 4.1）を 0，1 の中間の部分を持ち上げ，$\arg s=\pi-\theta$ の方向の無限遠にとばすと，図 4.3 に示すように C',C'',C''',C'''' の 4 つの積分路にわかれる．

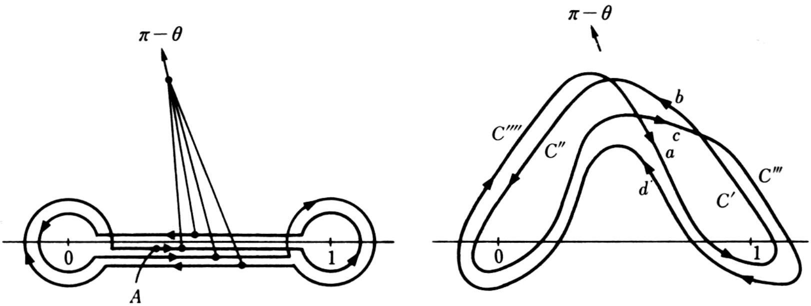


図 4.3 C の変形

このとき，これらの積分路に沿って $\arg s$，$\arg(1-s)$ の変化を考えると，つぎのようになる．

	C'	C''	C'''	C''''
$\arg s$	$\pi-\theta \longrightarrow \pi-\theta$	$\longrightarrow 3\pi-\theta$	$\longrightarrow 3\pi-\theta$	$\longrightarrow \pi-\theta$
$\arg(1-s)$	$-\theta \longrightarrow 2\pi-\theta$	$\longrightarrow 2\pi-\theta$	$\longrightarrow -\theta$	$\longrightarrow -\theta$

積分路 C_1，C_2 と比較する．C' は C_2 と全く同じであり，また C''' では C_2 上の被積分関数に $e^{2\pi i\alpha}$ がかかることと積分の向きが逆であることより

$$\int_{C'}+\int_{C'''}=(1-e^{2\pi i\alpha})\int_{C_2} \tag{4.14}$$

同様にして

$$\int_{C''}+\int_{C''''}=\{e^{2\pi i\alpha}\cdot e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}-e^{2\pi i\alpha}\}\int_{C_1} \tag{4.15}$$

したがって，(4.11)(4.12)(4.13)(4.14)(4.15) から

$$\begin{aligned}F(\alpha,\gamma,z)&=\frac{1}{(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_2}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds\\&\quad+\frac{1}{(1-e^{-2\pi i\alpha})}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds\\&=\frac{1}{2}\{G_1(\alpha,\gamma,z)+G_2(\alpha,\gamma,z)\},\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right)\end{aligned} \tag{4.16}$$

を得る．ここで，さらに $G_1(\alpha,\gamma,z)$ と $G_2(\alpha,\gamma,z)$ との間にはつぎの関係式が成り立つことを示そう．

$$G_2(\alpha,\gamma,z)=e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}e^zG_1(\gamma-\alpha,\gamma,e^{-\pi i}z),\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\right)\tag{4.17}$$

G_2 において，$s=1-t$ とおくと

$$G_2(\alpha,\gamma,z)=\frac{-2}{1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^z\int_{\tilde{C}_2}t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}e^{-zt}dt$$

積分路 $\tilde{C}_2$ は $\arg t=-\theta$ の方向の無限遠を出て，原点のまわりを正の向きに一周して無限遠に帰るものである．一方

$$G_1(\gamma-\alpha,\gamma,z)=\frac{2}{1-e^{-2\pi i(\gamma-\alpha)}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_1}t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}e^{zt}dt$$

において，z の代わりに $-z=e^{-\pi i}z$ とおきかえる（したがって，θ を $\theta-\pi$ とおきかえる）と，積分路と被積分路関数は全く一致するから

$$G_2(\alpha,\gamma,z)=\frac{-(1-e^{-2\pi i(\gamma-\alpha)})}{(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})}e^zG_1(\gamma-\alpha,\gamma,e^{-\pi i}z)$$

$$=e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}e^zG_1(\gamma-\alpha,\gamma,e^{-\pi i}z),\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\right)$$

が成り立つ．以上をまとめて，つぎの定理が得られる．

定理 4.4　合流型超幾何微分方程式 (4.1) は

$$G_1(\alpha,\gamma,z)=\frac{2}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds$$

$$\left(-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right)\tag{4.12}$$

$$G_2(\alpha,\gamma,z)=\frac{2}{1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_2}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\right)\tag{4.13}$$

で表される解をもつ．合流型超幾何級数 $F(\alpha,\gamma,z)$ はこれらを用いて

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{2}\{G_1(\alpha,\gamma,z)+G_2(\alpha,\gamma,z)\},\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right)\tag{4.16}$$

と表される．また，G_1 と G_2 の間には関係式

$$G_2(\alpha,\gamma,z)=e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}e^zG_1(\gamma-\alpha,\gamma,e^{-\pi i}z),\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{5\pi}{2}\right)\tag{4.17}$$

が成り立つ．

$F(\alpha,\gamma,z)$ は整関数で 1 価関数であるが，一般に $G_1(\alpha,\gamma,z)$ と $G_2(\alpha,\gamma,z)$ は多価関数である．$-3\pi/2<\arg z<\pi/2$ であるとき

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{2}\{\tilde{G}_1(\alpha,\gamma,z)+\tilde{G}_2(\alpha,\gamma,z)\},\quad \left(-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tilde{G}_1(\alpha,\gamma,z)=e^{-2\pi i\alpha}G_1(\alpha,\gamma,z),\quad \left(-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right) \qquad (4.18)$$

$$\tilde{G}_2(\alpha,\gamma,z)=e^{z}G_1(\gamma-\alpha,\gamma,e^{\pi i}z),\quad \left(-\frac{5\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立つ．

4.3 漸近展開

A. 合流型超幾何微分方程式（4.1）

$$z\frac{d^2u}{dz}+(\gamma-z)\frac{du}{dz}-\alpha u=0$$

は $z=0$ を確定特異点，$z=\infty$ を不確定特異点としてもつ．$z=0$ の近傍における解

$$u_1(z)=F(\alpha,\gamma,z)$$
$$u_2(z)=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z) \qquad (4.19)$$

の収束半径は∞であり，任意の z に対し収束する．しかし，$|z|$ が大きくなると収束は遅く，したがって $z=\infty$ の近傍での解の振る舞いを知るには，収束する級数解（4.19）は不適当である．そこで，（4.19）の $z=\infty$ の近傍における**漸近展開** (asymptotic expansion)――発散する z^{-1} のべき級数で $|z|$ が大分大であるとき解のよい近似を与える――を求める．一般に不確定特異点の近傍においては，収束するべき級数解の代わりに解の漸近展開が得られる．

$F(\alpha,\gamma,z)$ の $z\to\infty$ のときの漸近展開は（4.16）と（4.17）から $G_1(\alpha,\gamma,z)$ の漸近展開が求まればよい．G_1 の積分表示（4.12）

$$G_1(\alpha,\gamma,z)=\frac{2}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_{C_1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}e^{zs}ds$$

において $zs=e^{-\pi i}t$，または $s=e^{-\pi i}t/z$ とおき，したがって

$$s^{\alpha-1}ds=e^{-\pi i\alpha}z^{-\alpha}t^{\alpha-1}dt$$

とおけば

$$G_1(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{i\sin\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}\int_{\infty}^{(0_+)}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}e^{-t}dt$$

ここで，積分路は $\arg t=0$ の方向の無限遠からやってきて，原点のまわりを正の

向きに1回りして，$\arg t=2\pi$ の方向の無限遠にもどる（図4.4）．このとき $\arg(1+t/z)$ は $-\theta$ から $-\theta$ へもどる．

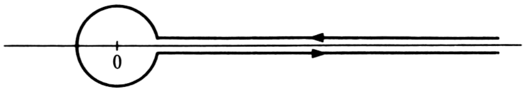


図 4.4　t−平面での積分路

C_1 に沿って $\arg s$，$\arg t$，$\arg(1+t/z)$ の変化はつぎの表のようになる．

C_1	$\arg s$	$-\pi-\theta \longrightarrow \pi-\theta$
	$\arg t$	$0 \longrightarrow 2\pi$
	$\arg\left(1+\dfrac{t}{z}\right)$	$-\theta \longrightarrow -\theta$

$|z|$ が大きいときの振る舞いを調べるために，$(1+t/z)^{\gamma-\alpha-1}$ を $1/z$ のべき級数に展開する．任意の N に対して

$$\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}=\sum_{n=0}^{N}\binom{\gamma-\alpha-1}{n}\left(\frac{t}{z}\right)^{n}+R_N$$

$$\binom{\gamma-\alpha-1}{n}=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{n!\,\Gamma(\gamma-\alpha-n)}$$

とおき，積分の式に代入すると

$$G_1(\alpha,\gamma,z)=\frac{1}{i\sin\pi\alpha}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\,z^{-\alpha}\left\{\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{n!\,\Gamma(\gamma-\alpha-n)}z^{-n}\right.$$
$$\left.\int_{\infty}^{(0_+)}t^{n+\alpha-1}e^{-t}dt+\int_{\infty}^{(0_+)}t^{\alpha-1}R_n e^{-t}dt\right\}$$

が得られる．ここで，まず上式の最後の項が適当な正数 K に対して

$$\left|\int_{\infty}^{(0_+)}t^{\alpha-1}R_n e^{-t}dt\right|<K|z|^{-(N+1)}\quad(K\text{ は正の定数})$$

をみたすことを示そう．積分路を $|t/z|\leqq 1/2$ の部分 C_1 と $|t/z|\geqq 1/2$ の部分 C_2 に分ける：

$$\left|\int_{\infty}^{(0_+)}t^{\alpha-1}R_n e^{-t}dt\right|\leqq\left|\int_{C_1}t^{\alpha-1}R_N e^{-t}dt\right|+\left|\int_{C_2}t^{\alpha-1}R_N e^{-t}dt\right|$$

第1項は $|R_n|\leqq K'\,|z|^{-(N+1)}|t|^{N+1}$ より明らか．また，第2項は $|t|\geqq|z|/2$ において $|t^{\alpha-1}R_N|\leqq K''\,|z|^{l}t^{m}$ をみたす正数 K'', l, m がとれる．したがって，適当な

正数 K''', K が存在して

$$\left|\int_{C_2} t^{\alpha-1} R_N e^{-t} dt\right| \leqq K'' \int_{|t| \geq |z|/2} |z|^l t^m e^{-t} dt$$

$$\leqq K''' |z|^{l+m} e^{-|z|/2} \leqq K |z|^{-(N+1)}$$

となるからである.

つぎに, $\Gamma(z)$ の公式 (7.9) から

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} \int_{\infty}^{(0_+)} e^{-t} t^{z-1} dt$$

を用いると

$$\frac{1}{i \sin \pi\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{n!\Gamma(\gamma-\alpha-n)} \int_{\infty}^{(0_+)} t^{n+\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{i \sin \pi\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{n!\Gamma(\gamma-\alpha-n)} \Gamma(\alpha+n) e^{\pi i(n+\alpha)} 2i \sin \pi(n+\alpha)$$

$$= 2e^{\pi i \alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha) n! \Gamma(\gamma-\alpha-n)}$$

$$= 2e^{\pi i \alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\alpha-\gamma+1+n)}{n!\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}$$

したがって, 結局

$$G_1(\alpha, \gamma, z) = 2e^{\pi i \alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} z^{-\alpha}$$

$$\left\{1 + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\alpha-\gamma+1+n)}{n!\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma-1)} z^{-n} + 0(z^{-N})\right\}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi\right) \qquad (4.20)$$

が得られる. 上の式の変形において

$$\Gamma(\gamma-\alpha-n)\Gamma(1-\gamma+\alpha+n) = \frac{\pi}{\sin \pi(\gamma-\alpha-n)}$$

$$\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\gamma+\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi(\gamma-\alpha)}$$

を用いた. また, (4.17) から

$$G_2(\alpha, \gamma, z) = \frac{2\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}$$

$$\left\{1 + \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)\Gamma(1-\alpha+n)}{n!\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} z^{-n} + 0(z^{-N})\right\}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5}{2}\pi\right) \qquad (4.21)$$

が得られる．なお，(4.20) は記号$\simeq$を用いてつぎのよう表し，右辺を $G_1(\alpha,\gamma,z)$ の $z\to\infty\left(-\frac{3}{2}\pi<\arg z<\frac{3}{2}\pi\right)$ のときの**漸近展開**という．

$$G_1(\alpha,\gamma,z)\simeq 2e^{\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\alpha-\gamma+1+n)}{n!\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}z^{-n}\right\}$$

(4.16)，(4.18)，(4.20) および (4.21) から，つぎの定理が得られる．

定理 4.5　$z\to\infty$ のとき，$F(\alpha,\gamma,z)$ の漸近展開の主要項は

$$F(\alpha,\gamma,z)=e^{\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}\{1+0(z^{-1})\}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}\{1+0(z^{-1})\}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\right) \tag{4.22}$$

$$F(\alpha,\gamma,z)=e^{-\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}\{1+0(z^{-1})\}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}\{1+0(z^{-1})\}$$

$$\left(-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right) \tag{4.23}$$

となる．

この定理から $F(\alpha,\gamma,z)$ の $z\to\infty$ のときの振る舞いはつぎのようになる．(4.22)，(4.23) から $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ においては第1項は第2項に比べて指数的に微小であるから，$F(\alpha,\gamma,z)\simeq\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}$ とかくことができる．また，$\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi$ においては e^z は指数的に減少関数であるから，$F(\alpha,\gamma,z)\simeq e^{\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}$，同様に $-\frac{3}{2}\pi<\arg z<-\frac{\pi}{2}$ では $F(\alpha,\gamma,z)\simeq e^{-\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}$ となる．したがって，$F(\alpha,\gamma,z)$ の漸近展開の形は $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$ を境界として不連続的に変わる．このような現象を**ストークス現象**（Stokes phenomena, G. G. Stokes (1819–1903)）という．一般に不確定特異点をもつ微分方程式の研究にとって，ストークス現象の解明は最も重要な課題である．

4.4　ホイッティカー関数，エルミートの多項式

A.　合流型超幾何微分方程式 (4.1) に，変換

$$u=e^{\frac{z}{2}}z^{-\frac{\gamma}{2}}w \tag{4.24}$$

を行えば，1階微分の係数が消去されて

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\frac{\gamma}{2}-\alpha}{z}-\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)}{z^2}\right\}w=0$$

を得る．ここで，$\alpha=\mu-\kappa+\dfrac{1}{2}$，$\gamma=2\mu+1$ とおけば

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{\kappa}{z}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{z^2}\right\}w=0 \tag{4.25}$$

となる．これは**ホイッティカー**（E. T. Whittaker（1873–1956））**の微分方程式**とよばれる．線形独立な2つの解は（4.24）と（4.1）の解（4.2）と（4.3）から 2μ が整数でないとき

$$M_{\kappa,\mu}(z)=z^{\frac{1}{2}+\mu}e^{-\frac{z}{2}}F\left(\frac{1}{2}+\mu-\kappa,2\mu+1,z\right) \tag{4.26}$$

$$M_{\kappa,-\mu}(z)=z^{\frac{1}{2}-\mu}e^{-\frac{z}{2}}F\left(\frac{1}{2}-\mu-\kappa,\ -2\mu+1,z\right) \tag{4.27}$$

で与えられる．$M_{\kappa,\mu}$ (z) と $M_{\kappa,-\mu}$ (z) の線形結合

$$W_{\kappa,\mu}(z)=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\kappa\right)}M_{\kappa,\mu}(z)+\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\kappa\right)}M_{\kappa,-\mu}(z) \tag{4.28}$$

を**ホイッティカーの関数**（Whittaker's function）という．微分方程式（4.25）は μ と z の符号を変えても方程式は不変であるから，$W_{\kappa,\mu}(z)$ と線形独立な解として $W_{\kappa,-\mu}(-z)$ をとることができる．つぎの等式が成り立つ．

定理 4.6

$$W_{\kappa,\mu}(z)=\frac{\Gamma\left(\mu+\kappa+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(2\mu+1)}e^{\pi i\left(-\mu+\kappa-\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}G_1\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2},2\mu+1,z\right) \tag{4.29}$$

証明 まず（4.22）と（4.26）から $M_{\kappa,\mu}(z)$ の漸近展開の初項は

$$M_{\kappa,\mu}(z)\simeq e^{-\frac{z}{2}}z^{\frac{1}{2}+\mu}\left\{e^{\pi i\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\kappa+\frac{1}{2}\right)}z^{-\mu+\kappa-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}e^zz^{-\mu-\kappa-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\Gamma(2\mu+1)\left\{\frac{e^{\pi i}\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\kappa+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\kappa}+\frac{1}{\Gamma\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{z}{2}}z^{-\kappa}\right\}$$

したがって

$$\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\kappa\right)}M_{\kappa,\mu}(z)\simeq\frac{-\cos\pi(\mu+\kappa)}{\sin 2\pi\mu}e^{\pi i\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\kappa}$$
$$-\frac{\pi}{\sin\pi\mu\,\Gamma\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\kappa+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{z}{2}}z^{-\kappa}$$

同様に

$$\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\kappa\right)}M_{\kappa,-\mu}(z)\simeq\frac{\cos\pi(-\mu+\kappa)}{\sin 2\pi\mu}e^{\pi i\left(-\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}e^{-\frac{z}{2}}z^{\kappa}$$
$$+\frac{\pi}{\sin\pi\mu\,\Gamma\left(-\mu+\kappa+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{z}{2}}z^{-\kappa}$$

よって

$$W_{\kappa,\mu}(z)\simeq\frac{1}{\sin 2\pi\mu}\left\{-\cos\pi(\mu+\kappa)e^{\pi i\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}\right.$$
$$\left.+\cos(2\mu+\kappa)e^{\pi i\left(-\mu-\kappa+\frac{1}{2}\right)}\right\}e^{-\frac{z}{2}}z^{\kappa}$$
$$=e^{-\frac{z}{2}}z^{\kappa} \tag{4.30}$$

一方，$W_{\kappa,\mu}(z)$ は $e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}G_1\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2},2\mu+1,z\right)$ と $e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}G_2\left(\mu-\kappa+\frac{1}{2},2\mu+1,z\right)$ の線形結合で表されるが，G_1，G_2 の漸近展開 (4.20)，(4.21) を用いると，後者は，$\alpha=\mu-\kappa+\frac{1}{2}$，$\gamma=2\mu+1$ であったから

$$e^{-\frac{z}{2}}z^{\mu+\frac{1}{2}}e^{z}\cdot z^{\alpha-\gamma}=e^{\frac{z}{2}}z^{-\kappa}$$

に比例しており，また同様にして前者は $e^{-\frac{z}{2}}z^{\kappa}$ に比例することがわかるので，結局 $W_{\kappa,\mu}(z)$ は前者に比例しなければならない．(4.20) と (4.30) を比較して (4.29) が得られる．　(証明終)

B.

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\lambda-z^2)w=0$$

は**ウェーバー**（H. F. Weber）**の微分方程式**といわれる．

$$w=e^{-\frac{z^2}{2}}v$$

とおくと

$$\frac{d^2v}{dz^2}-2z\frac{dv}{dz}+2\nu v=0 \quad \left(\nu=\frac{\lambda-1}{2}\right) \tag{4.31}$$

を**エルミート**（C. Hermite (1822–1901)）**の微分方程式**という．ここで，さらに $z^2=t$ とおけば

$$t\frac{d^2v}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{dv}{dt}+\frac{\nu}{2}v=0$$

となり，これは合流型超幾何微分方程式 $\left(\alpha=-\frac{\nu}{2}, \gamma=\frac{1}{2}\right)$ である．したがって解は

$$\begin{aligned} v_1(z)&=F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},t\right)=F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},z^2\right) \\ v_2(z)&=t^{\frac{1}{2}}F\left(-\frac{\nu-1}{2},\frac{3}{2},t\right)=zF\left(-\frac{\nu-1}{2},\frac{3}{2},z^2\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

によって与えられる．これらの解が多項式，すなわち，$v_1(z)$ においては $\nu=2m$，また $v_2(z)$ においては $\nu=2m+1$ となる場合

$$\begin{aligned} H_{2m}(z)&=(-1)^m\frac{(2m)!}{m!}F\left(-m,\frac{1}{2},z^2\right) \\ H_{2m+1}(z)&=2(-1)^m\frac{(2m+1)!}{m!}zF\left(-m,\frac{3}{2},z^2\right) \end{aligned} \tag{4.33}$$

を**エルミートの多項式**（Hermite polynomial）という．$m=0, 1, 2, 3, \cdots$ とおけば

$$H_0(z)=1, \quad H_1(z)=2z, \quad H_2(z)=4z^2-2, \quad H_3(z)=8z^3-12z$$
$$H_4(z)=16z^4-48z^2+12, \quad H_5(z)=32z^5-160z^3+120z, \cdots,$$

一般に

$$H_n(z)=(2z)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2z)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2z)^{n-4}+\cdots \tag{4.34}$$

とかくことができる．微分積分学の教科書ではエルミートの多項式は

$$H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}) \tag{4.35}$$

で定義されている．これをみるために，$H_n=e^{z^2}h_n(z)$ とおいて (4.31) ($\nu=n$) に代入し，h_n のみたす方程式を求めると

$$h_n''+2zh_n'+(2n+2)h_n=0$$

を得る．$n=0$ ならば

$$h_0''+2zh_0'+2h_0=0$$

となり，一般解は $h_0=e^{-z^2}y$ とおけば $y''-2zy'=0$ となることから

$$h_0(z)=Ae^{-z^2}+Be^{-z^2}\int_0^z e^{s^2}ds$$

で与えられる．また，$h_n(z)=\{h_0(z)\}^{(n)}$ が成り立ち，$H_n(z)=e^{z^2}h_n(z)$ は z の多項式であることから $B=0$ でなければならない．したがって

$$H_n(z)=Ae^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2})$$

(4.34) と比較して，$A=(-1)^n$ であることがわかる．すなわち，(4.35) が示された．

つぎに，(4.35) を用いてエルミートの多項式の直交関係を調べておこう．$z^m e^{-z^2}(m\leqq n)$ を (4.35) に掛けて $-\infty$ から ∞ まで積分し，部分積分をくりかえし用いれば

$$[z^m, H_n(z)]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}H_n(z)z^m dz=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2})\cdot z^m dz$$

$$=\cdots=(-1)^{n+m}m!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}(e^{-z^2})dz$$

$n>m$ ならば，この値は0となり，$H_n(z)$ は z^m と直交する．また，$n=m$ ならば $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$ から

$$[z^n, H_n(z)]=n!\sqrt{\pi}$$

が成り立つ．$H_m(z)=(2z)^m+\{\text{低次項}\}$ であるから，結局

$$[H_m(z), H_n(z)]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}H_m(z)H_n(z)dz=2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{m,n} \qquad (4.36)$$

が得られる．これがエルミートの多項式の直交関係式である．

4.5　ラゲールの関数とラゲールの陪関数

A.　合流型方程式 (4.1) において，$\gamma=1$，$\alpha=-\nu$ とおいた方程式

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(1-z)\frac{du}{dz}+\nu u=0 \qquad (4.37)$$

を**ラゲール**（E. N. Laguerre（1834－1866））**の微分方程式**という．$\gamma=1$ であるから例外の場合に当り，基本解は（4.4）で与えられる．$\log z$ を含まない解に $\Gamma(\nu+1)$ を掛けたもの

$$L_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)F(-\nu, 1, z) \tag{4.38}$$

を**ラゲールの関数**（Laguerre function）という．

（4.37）を m 回微分すれば

$$z\frac{d^{m+2}u}{dz^{m+2}}+(m+1-z)\frac{d^{m+1}u}{dz^{m+1}}+(\nu-m)\frac{d^m u}{dz^m}=0$$

が得られる．これは $w=d^m u/dz^m$ とおけば

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(m+1-z)\frac{dw}{dz}+(\nu-m)w=0 \tag{4.39}$$

となり，**ラゲールの陪微分方程式**とよばれる．1つの解は

$$\begin{aligned}L_\nu{}^{(m)}(z)&=\frac{d^m}{dz^m}L_\nu(z)\\&=\frac{(-\nu)(-\nu+1)\cdots(-\nu+m-1)}{m!}\Gamma(\nu+1)F(-\nu+m, m+1, z)\\&=\frac{(-1)^m\{\Gamma(\nu+1)\}^2}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu-m+1)}F(-\nu+m, m+1, z)\end{aligned} \tag{4.40}$$

で与えられ，これを**ラゲールの陪関数**という．（4.39）は合流型方程式（4.1）で $\gamma=m+1(\alpha=-n+m)$ とおいた例外の場合である．

B. $L_n{}^{(m)}(z)$ において n が m 以上の整数であるときは，$L_n{}^{(m)}(z)$ は $n-m$ 次の多項式となる．（4.38）で $\nu=n$ とおけば，n 次の多項式は

$$\begin{aligned}L_n(z)=n!\Big\{1-\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{2!2!}z^2+\cdots\\+(-1)^k\frac{(n)(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2}z^k+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}z^n\Big\}\end{aligned} \tag{4.41}$$

となり，これを**ラゲールの多項式**（Laguerre polynomial）という．たとえば，$n=0, 1, 2, 3$ に対しては

$$L_0(z)=1,\quad L_1(z)=1-z,\quad L_2(z)=2-4z+z^2,\quad L_3(z)=6-18z+9z^2-z^3$$

となる．また，これらを逐次微分すれば，**ラゲールの陪多項式**

$$L_1{}^{(1)}(z)=-1,\ L_2{}^{(1)}(z)=-4+2z,\ L_2{}^{(2)}(z)=2,\ L_3{}^{(1)}(z)=-18+18z-3z^2$$
$$L_3{}^{(2)}(z)=18-6z,\quad L_3{}^{(3)}(z)=-6,\ \cdots$$

が得られる．

ラゲールの多項式，および陪多項式に関して

$$L_n(z)=e^z\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n) \tag{4.42}$$

$$L_n{}^{(m)}(z)=\frac{d^m}{dz^m}\left\{e^z\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n)\right\}=\frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}e^z z^{-m}\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}(e^{-z}z^n) \tag{4.43}$$

が成り立つ．実際，ライプニッツの公式を用いて

$$\begin{aligned}e^z\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n)&=e^z\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\frac{d^k}{dz^k}(e^{-z})\frac{d^{n-k}}{dz^{n-k}}(z^n)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{n!}{k!}z^k\\&=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(k!)^2(n-k)!}z^k=(4.41)\text{ の右辺}\end{aligned}$$

となるからである．また，(4.43) は上式を m 回微分して

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dz^m}\left\{e^z\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}z^n)\right\}&=n!\sum_{k\geq m}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(k!)^2(n-k)!}\frac{k!}{(k-m)!}z^{k-m}\\&=\frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}z^{-m}\sum_{k\geq m}^{n}\frac{(-1)^{k-m}}{(k!)^2}\frac{n!(n-m)!}{(n-k)!}\frac{k!}{(k-m)!}z^k\\&=\frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}z^{-m}\sum_{h=0}^{n-m}\frac{(-1)^h}{h!}\frac{n!(n-m)!}{(n-m-h)!(m-h)!}z^{m+h}\\&=\frac{(-1)^m n!}{(n-m)!}e^z z^{-m}\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}(e^{-z}z^n)\end{aligned}$$

から導かれる．また，ラゲールの多項式および陪多項式に対して，つぎの直交関係式が成り立つ．

定理 4.7

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_l(x)dx=(n!)^2\delta_{nl} \tag{4.44}$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}L_n{}^{(m)}(x)L_l{}^{(m)}(x)dx=\frac{(n!)^3}{(n-m)!}\delta_{nl} \tag{4.45}$$

証明　まず，(4.44) を示すために

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x) dx = 0 \quad (k<n) \tag{4.46}$$

が成り立つことを確かめてみよう．部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x) dx &= \int_0^\infty x^k \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)dx \\ &= \left[x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)\right]_0^\infty - \int_0^\infty kx^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)dx \\ &= -k\int_0^\infty x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x}x^n)dx \\ &= \cdots = (-1)^k k!\int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(e^{-x}x^n)dx \\ &= (-1)^k k!\left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(e^{-x}x^n)\right]_0^\infty = 0\end{aligned}$$

したがって，$n>l$ とすると $L_l(x)$ は l 次多項式であるから

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_l(x) dx = 0$$

が成り立つ．$n<l$ の場合も同様である．$n=l$ のときは (4.42)，(4.46) から

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx &= (-1)^n \int_0^\infty e^{-x} x^n L_n(x) dx \\ &= (-1)^n \int_0^\infty x^n \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)dx\end{aligned}$$

ここで，再び部分積分をくり返せば

$$= n!\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = (n!)^2$$

が得られ，(4.44) が示されたことになる．

つぎに，$1 \leqq m < l < n$ として

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^l e^{-x} L_n{}^m(x) dx &= \int_0^\infty x^l e^{-x} \frac{d^m}{dx^m}\left\{e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\right\}dx \\ &= (-1)^m \int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m}(x^l e^{-x}) \cdot e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)dx \\ &= (-1)^m \int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m}(x^l e^{-x}) L_n(x) dx = 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

したがって $x^m L_l{}^{(m)}(x)$ は高々 l 次多項式であるから

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^{(m)}(x) L_l^{(m)}(x) dx = 0 \quad (l<n)$$

$l>n$ の場合も同様である.

$1 \leqq m < l = n$ の場合は (4.43), (4.47) および部分積分を用いて

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^{(m)}(x) L_n^{(m)}(x) dx$$

$$= \int_0^\infty x^m e^{-x} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \right\} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \right\} dx$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty \frac{n!}{(n-m)!} x^n e^{-x} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \right\} dx$$

$$= (-1)^{n+m} \frac{n!}{(n-m)!} \int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m} \{x^n e^{-x}\} L_n(x) dx$$

(4.46) から

$$= (-1)^n \frac{n!}{(n-m)!} \int_0^\infty e^{-x} x^n L_n(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!}$$

となり定理は示された.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

4.6　例題　放物柱関数

ホイッティカーの関数 $W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}(t)$ は (4.25) と比較すれば

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}}{t} + \frac{3}{16t^2} \right\} w = 0$$

をみたすことがわかる. ここで, $v(z) = z^{-\frac{1}{2}} w\left(\frac{1}{2}z^2\right)$ とおくと, $v(z)$ はウェーバーの微分方程式

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right) v = 0 \tag{4.48}$$

の解となっている. それは

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{1}{2} z^{-1} v + z^{\frac{1}{2}} \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{2} z^{-2} v - \frac{1}{2} z^{-1} \frac{dv}{dz} + \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \frac{dw}{dt} + z^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 w}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{2} z^{-2} v - \frac{1}{2} z^{-1} \frac{dv}{dz} + \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{dv}{dz} + \frac{1}{2} z^{-1} v \right\} z^{-\frac{1}{2}}$$

$$-z^{\frac{3}{2}}\left\{-\frac{1}{4}+\frac{n+\frac{1}{2}}{z^2}+\frac{3}{4z^4}\right\}z^{\frac{1}{2}}v$$

$$=\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}z^2\right\}v$$

となるからである．そこで，$v(z)$ に $2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}$ をかけた関数

$$D_n(z)=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right) \tag{4.49}$$

はウェーバーの微分方程式の1つの解である．$D_n(-z)$，$D_{-n-1}(iz)$ および $D_{-n-1}(-iz)$ も同じく解となり，これらを合わせて**放物柱関数**（parabolic cylinder functions）という．(4.28) から

$$D_n(z)=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)\right\}$$

である．

また，(4.26) と (4.27) から

$$z^{-\frac{1}{2}}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)=2^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}z^2}F\left(\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}z^2\right)$$

$$z^{-\frac{1}{2}}M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)=2^{-\frac{3}{4}}ze^{-\frac{1}{4}z^2}F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}z^2\right)$$

とかかれる．したがって，合流型超幾何関数の $z=0$ の近傍における級数展開 (4.2) を用いると

$$D_n(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)}+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)}z+\cdots \tag{4.50}$$

となる．これを用いると，$D_n(z)$，$D_{-n-1}(\pm iz)$，$D_n(-z)$ の間の線形関係式が得られる．たとえば

$$D_n(z)=aD_{-n-1}(iz)+bD_{-n-1}(-iz)$$

とおいて両辺を z のべき級数に展開すると

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)}+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)}z+\cdots$$

$$=a\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)}iz+\cdots\right\}$$

$$+b\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)}+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)}(-iz)+\cdots\right\}$$

両辺の常数項と z の係数を比較することにより，a と b を求めると

$$a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(n+1)e^{\frac{1}{2}n\pi i},\quad b=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(n+1)e^{-\frac{1}{2}n\pi i}$$

したがって

$$D_n(z)=\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{\frac{1}{2}n\pi i}D_{-n-1}(iz)+e^{-\frac{1}{2}n\pi i}D_{-n-1}(-iz)\right\} \quad (4.51)$$

とかける．

同様に

$$D_n(z)=e^{n\pi i}D_n(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i}D_{-n-1}(-iz) \quad (4.52)$$

$$D_n(z)=e^{-n\pi i}D_n(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i}D_{-n-1}(iz) \quad (4.53)$$

が得られる．

$z\to\infty$ のときの漸近展開は（4.49），（4.29）から

$$D_n(z)=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{\frac{1}{2}n\pi i}e^{-\frac{1}{4}z^2}\left(\frac{1}{2}z^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$G_1\left(-\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}z^2\right)$$

となり，さらに，G_1 の漸近展開の公式（4.20）を用いると

$$G_1\left(-\frac{1}{2}n,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}z^2\right)\simeq 2e^{-\frac{1}{2}n\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}z^2\right)^{\frac{1}{2}n}\left\{1-\frac{n(n-1)}{2z^2}\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8z^4}-\cdots\Big\}\quad\left(|\arg z^2|<\frac{3}{2}\pi\right)$$

であるから，結局

$$D_n(z)\simeq e^{-\frac{1}{4}z^2}z^n\left\{1-\frac{n(n-1)}{2z^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8z^4}-\cdots\right\}$$

$$\left(|\arg z|<\frac{3}{4}\pi\right)\qquad(4.54)$$

が得られる．$\arg z$ が上の範囲の外にある場合の漸近展開は（4.54）と（4.51)～(4.53）を用いればよい．

第5章　量子力学への応用

本章では超幾何関数および合流型超幾何関数の理論の応用として，原子核と電子からなる最も簡単な系である水素原子の量子力学的な取り扱いとその波動関数についてのべる．

原子的現象，すなわち非常にせまい空間領域（$\simeq 10^{-8}$ cm）で非常に小さい質量をもった粒子について起こる現象に対し，ニュートン力学とマクスウェル電磁気学を適用すると実験と矛盾する結果になってしまう．水素原子は原子核と電子からなり，それらの間にはクーロン力が働く．地球が太陽のまわりを安定に回り続けるように，電子も原子核のまわりを回り続けることができるであろうか．電磁気理論によれば，荷電粒子が加速度運動をするときには電磁波の射出を伴い，したがって系のエネルギーは次第に失われる．回転運動は加速度運動であるので，電子は電磁波を放射しながら自分のエネルギーを失うので，ついには核に落ちこんでしまうはずである．このようなわけで古典電気力学にしたがえば，原子は不安定となり現実と一致しない．また，このような運動の過程で放射される電磁波は連続的に波動を変化させるので，水素原子のだす光のスペクトル（波長分布）は連続スペクトルとなるはずであるが，実際には不連続な輝線スペクトルが得られる．

したがって，原子的現象を記述する力学は従来の古典力学の考え方とは原理的に異なった思想の上に構築されたものでなければならないが，これがいわゆる量子力学（あるいは波動力学）といわれる理論体系である．

5.1　量子力学の基礎原理

量子力学（quantum mechanics）はいくつかの基礎原理の上に組みたてられている．この原理を波動力学の方式にしたがって要約を説明しよう．

A.　**原理 1**

1つの系に属する粒子の状態は粒子の座標および時間の関数である**波動関数**（wave function）$\Psi(x,t)$ によって記述される．$\Psi(x,t)$ は全ての x と t に対し有限，1価かつ連続的微分可能でなければならない．体積要素を dv，Ψ^*を Ψ の複

素共役とすると，$\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dv$ は (x,t) において体積 dv の中に粒子がみいだされる確率を与える．$\Psi^*\Psi$ は**確率密度**とよばれる．確率密度の定義から

$$\int \Psi^*\Psi dv=1 \tag{5.1}$$

をみたさなければならない．このとき波動関数 Ψ は**規格化**されているという．

B. **原理 2**

任意の力学量 A に対して**線形演算子** $\boldsymbol{A}$ が対応する．この対応は下の表で与えられる．1つの演算子 $\boldsymbol{A}$ を波動関数 Ψ に作用させたとき，a を定数として

$$\boldsymbol{A}\Psi=a\Psi \tag{5.2}$$

が成り立つとき，すなわち Ψ が $\boldsymbol{A}$ の**固有関数**であるとき，Ψ で表される状態において力学量 A を測定すると測定値として**固有値** a が得られる．

表 5.1 力学量，演算子と演算

力学量	演算子	演　算
位置座標	$\left.\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\}\boldsymbol{r}$	$\left.\begin{matrix}x\times\\y\times\\z\times\end{matrix}\right\}\boldsymbol{r}\times$
運動量	$\left.\begin{matrix}p_x\\p_y\\p_z\end{matrix}\right\}\boldsymbol{p}$	$\left.\begin{matrix}-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\\-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}\\-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}\end{matrix}\right\}-i\hbar\nabla$：運動量演算子
時間	t	$t\times$
エネルギー	ε	$i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$：エネルギー演算子

ただし，$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$，h はプランク定数．

例 5.1 質量 m の1個の粒子が運動量 $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$ をもち，ポテンシャルエネルギー $V(x,y,z)$ の空間を運動しているときの**ハミルトン関数**は

$$H=\frac{1}{2m}(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2)+V(x,y,z)$$

で与えられる．ハミルトン関数は古典力学では系の全エネルギーを表す関数であるから，表5.1により粒子の波動関数 Ψ に対する演算でおきかえると

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\boldsymbol{H}\Psi$$

$$\boldsymbol{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(x,y,z)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}+V(x,y,z) \tag{5.3}$$

が得られる．右辺の演算子 $\boldsymbol{H}$ を**ハミルトン演算子**という．

例 5.2　1個の粒子の角運動量 $\boldsymbol{l}(l_x, l_y, l_z)$ は位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(x, y, z)$，運動量を $\boldsymbol{p}(p_x, p_y, p_z)$ とすると

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\quad（ベクトル積）$$

で与えられる．成分でかくと

$$l_x = yp_z - zp_y$$
$$l_y = zp_x - xp_z$$
$$l_z = xp_y - yp_x$$

となる．表5.1から演算子は

$$\boldsymbol{l}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\boldsymbol{l}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{5.4}$$
$$\boldsymbol{l}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

となる．これを**角運動量演算子**という．

C.　原理 3

波動関数 Ψ がある力学量 A に対応する演算子 $\boldsymbol{A}$ の固有関数でないならば，Ψ の状態において力学量 A を観測しても確定した値は得られない．観測をくり返すと，測定結果の平均値を $<A>$ とすると

$$<A> = \int \Psi^* \boldsymbol{A} \Psi dv$$

が成立する．Ψ が $\boldsymbol{A}$ の固有関数ならば

$$<A> = \int \Psi^* \boldsymbol{A} \Psi dv = a\int \Psi^* \Psi dv = a$$

が成り立つ．

D.　原理 4

波動関数 Ψ はつぎの**波動方程式**（wave equation）をみたす．

$$\boldsymbol{H}\Psi = \varepsilon\Psi \quad または \quad \boldsymbol{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{5.5}$$

ここで，$\boldsymbol{H}$ はハミルトン演算子，ε はエネルギー演算子である．この方程式は**シュレディンガー**（E. Schrödinger（1887–1961））**の波動方程式**とよばれ，量子力学

の基本方程式である．

例 5.3　簡単な1粒子の場合を考えよう．波動関数 Ψ がエネルギーの演算子の固有関数であるとき，E をエネルギーの固有値とすると

$$\varepsilon\Psi = E\Psi \quad \text{または} \quad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = E\Psi$$

とかける．この関係式から Ψ は

$$\Psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{\frac{1}{i\hbar}Et} \tag{5.6}$$

の形にかくことができる．したがって，シュレディンガーの波動方程式は

$$\boldsymbol{H}\phi = E\phi$$

となる．これは時間を含まないシュレディンガーの波動方程式とよばれ，とくにハミルトン演算子が（5.3）で与えられる場合には

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right\} + (E - V)\phi = 0 \tag{5.7}$$

となり，この方程式がもっともよくつかわれるものである．

5.2　水素原子に対するシュレディンガーの波動方程式

水素原子は核（陽子）と1個の電子の2粒子からなる系である．これをとり扱うには，2粒子系に関するハミルトン演算子をつくり，シュレディンガーの波動方程式を解けばよい．しかし，電子の質量は陽子の質量に比べてはるかに小さく，系の重心はほぼ陽子の位置にあると考えられる．したがって，ここでは陽子が静止している場合の電子の波動方程式を作り解を求めよう．この場合，ハミルトン演算子は

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

で与えられる．ここで右辺の第2項はクーロンポテンシャルエネルギーである．また，μ は電子の質量，$-e$ は電荷，ε_0 は真空状態における誘電率である．これに対応する時間を含まないシュレディンガーの波動方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\phi - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\phi = E\phi \tag{5.8}$$

となる．波動関数 $\phi(x, y, z)$ は R^3 において1価，有界で（5.8）をみたし，かつ規格化条件

$$\iiint_{R^3} \phi(x,y,z)\bar{\phi}(x,y,z)\,dxdydz=1 \tag{5.9}$$

をみたさなければならない．ここで，$\bar{\phi}$ は ϕ の複素共役である．微分方程式 (5.8) は極座標 (r,θ,φ) を用いて書き直し，変数分離の方法によって解くことができる．

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta \tag{5.10}$$

により，(5.8) は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)\phi=0 \tag{5.11}$$

となる．ϕ は r の関数と角度部分 θ，φ の関数の積で表せるとする．

$$\phi=\chi(r)Y(\theta,\varphi) \tag{5.12}$$

とおいて，(5.11) に代入すると

$$Y\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\chi}{\partial \gamma}\right)+\frac{\chi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{\chi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)\chi Y=0$$

と得る．これを χY で割りかきかえると

$$\frac{1}{\chi}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\chi}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)$$
$$=-\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$$

となる．左辺は r だけの関数であり，右辺は θ と φ の関数であるから，これらが等しくなるためには定数でなければならない．これを K とおくと，上式は

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\chi}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)\chi=K\chi \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=-KY \tag{5.14}$$

の2つの方程式にわかれる．さらに，(5.14) は θ と φ の関数の積で表すことができる：

$$Y(\theta,\varphi)=P(\theta)Q(\varphi) \tag{5.15}$$

とおいて，(5.14) に代入することにより

$$\frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+K\sin^2\theta=-\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}$$

を得る．この場合も左辺は θ のみの，右辺は φ のみの関数であることから，これらは定数でなければならない．この定数を m^2 とおくと

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+KP\sin^2\theta=m^2P \tag{5.16}$$

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2}=-m^2Q \tag{5.17}$$

と分離される．なお，このとき条件（5.9）は

$$\iiint_{R^3}\phi\bar{\phi}dxdydz=\int_0^\infty\chi\bar{\chi}r^2dr\int_0^\pi P\bar{P}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}Q\bar{Q}d\varphi=1 \tag{5.18}$$

となる．

5.3　波動方程式の解

A.（5.17）の解

Q は z 軸のまわりの角 φ の関数であるから

$$Q(\varphi+2\pi)=Q(\varphi) \tag{5.19}$$

をみたさなければならない．さらに，（5.9）から規格化条件

$$\int_0^{2\pi}Q(\varphi)\bar{Q}(\varphi)d\varphi=1 \tag{5.20}$$

をみたすようにしよう．（5.17）は容易に積分できて

$$Q(\varphi)=\begin{cases}Ae^{im\varphi}+Be^{-im\varphi} & (m\neq 0)\\ A'+B'\varphi & (m=0)\end{cases}$$

条件（5.19），（5.20）を考慮にいれて

$$Q(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\quad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5.21}$$

を得る．この m を**磁気量子数**といい，関数 Q は m によって特定される．

B.（5.16）の解

$z=\cos\theta$ とおくと

$$dz=-\sin\theta\,d\theta,\quad \sin\theta\frac{dP}{d\theta}=\sin\theta\frac{dP}{dz}\frac{dz}{d\theta}=-\sin^2\theta\frac{dP}{dz}$$

であるから，（5.16）は

$$(1-z^2)\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP}{dz}\right\}+K(1-z^2)P=m^2P\quad(|z|\leqq 1)$$

と変形される．ここで $K=l(l+1)$ とおくと

$$(1-z^2)\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP}{dz}\right\}+l(l+1)(1-z^2)P=m^2P$$

または

$$(1-z^2)^2\frac{d^2P}{dz^2}-2z(1-z^2)\frac{dP}{dz}+\{l(l+1)(1-z^2)-m^2\}P=0 \quad (5.22)$$

を得る．(5.22) はルジャンドルの陪微分方程式 (3.61) ($\nu=l, \mu=m$) である．特に $m=0$ ならば，ルジャンドルの微分方程式 (3.62) である．§3.6 B で述べたように，(5.22) は $z=\pm 1, \infty$ を確定特異点としてもつ．各特異点における特性根は $z=\pm 1$ において $\left\{\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\right\}$，$z=\infty$ において $\{-l, l+1\}$ である．したがって，(5.22) の一般解はリーマンの P 関数を用いて

$$P(z)=P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} & -l, & z \\ -\frac{m}{2} & -\frac{m}{2} & l+1 & \end{Bmatrix}$$

$$=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ 0 & 0 & -l+m, & z \\ -m & -m & l+1+m & \end{Bmatrix}$$

$$=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -l+m, & \frac{1-z}{2} \\ -m & -m & l+1+m & \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

と表される．ところが波動関数，したがって $P(\theta)$ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ において有限な値をとらなければならない，すなわち $P(z)$ は $z=\pm 1$ において収束しなければならない．そこでつぎの補題を示す．

補題 5.1　$m\geqq 0$ を整数とする．もし l が非負の整数でなければ，方程式 (5.22) の $|z|<1$ で定義されるべき級数解は $z=-1$ において発散する．

証明　(5.23) の最後の表現から

$$w(z)=(1-z^2)^{\frac{m}{2}}F(-l+m, l+m+1, m+1, \xi) \quad \left(\xi=\frac{1-z}{2}\right) \quad (5.24)$$

が（5.22）の$\xi=0$の近傍における1つの解である．mが非負の整数である場合，$w(z)$と線形独立な解は$\log\xi$が掛かる項をもち$\xi=0$，すなわち$z=1$で1価ではないことから，波動関数の成分としては不適である．さらに級数$F(-l+m, l+m+1, m+1, \xi)$はlが整数でないとき$\xi=1(z=-1)$で発散することを示す．

超幾何級数$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$の収束半径は1である．一般項a_nは

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

であるから（(3.4)）

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)\left(1+\dfrac{\beta}{n}\right)}$$

$$=1+\frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-\gamma-(\alpha+\beta)(1+\gamma)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

したがって，$F(-l+m, l+m+1, m+1, \xi)$に対しては

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1-m}{n}+\frac{\gamma(l,m)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

をみたす．収束半径上の点$\xi=1(z=-1)$における級数の収束発散は微分積分学の正項級数に関する**ガウス**（C. F. Gauss（1777–1855））**の判定法**を適用することにより，$1-m>1$のとき，すなわち$m<0$のとき収束，また$1-m\leqq 1$，すなわち$m\geqq 0$のとき発散する（参考文献［1］）． （証明終）

この補題から$w(z)$が$z=-1$で収束するためには級数が有限項で切れなければならない，すなわちξの多項式となることである．そのためには$\alpha=-l+m$，または$\beta=l+m+1$が0または負の整数となることである．したがって，lが整数でなければならない．この非負の整数lを**方位量子数**という．

$m=0$のとき，$w(z)$は第1種ルジャンドル関数

$$P_l(z)=F\left(-l, l+1, 1, \frac{1-z}{2}\right)=F\left(l+1, -l, 1, \frac{1-z}{2}\right)$$

であり，とくにlが正の整数ならばl次多項式となり，ルジャンドルの多項式にほかならない．また，mが正の整数であるとき

$$P_l^m(z)=(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}F(-l+m, l+m+1, m+1, \xi),\quad \xi=\frac{1-z}{2}$$

はルジャンドルの陪関数で，（3.70）から

$$P_l^m(z)=(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l(z)}{dz^m}$$

が成り立つ．また，m が負の整数の場合には（3.72）を用いると

$$P_l^m(z)=P_l^{-|m|}(z)=(-1)^{-|m|}\frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l-m+1)}P_l^{|m|}(z)$$

$$=\frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l-m+1)}(1-z^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}P_l(z)}{dz^{|m|}}$$

となる．$P_l(z)$ は l 次多項式であるから

$$|m|\leqq l$$

でなければならない．

ここで，$P(z)=N_\theta P_l^m(z)$ が確率密度としての規格化条件

$$\int_0^\pi P(\theta)\bar{P}(\theta)\sin\theta\, d\theta=\int_{-1}^1 P(z)\bar{P}(z)dz=1$$

をみたすように係数 N_θ を定めよう．（3.74）から

$$\int_{-1}^1 P_l^m(z)P_{l'}^{m'}(z)dz=\delta_{mm'}\cdot\delta_{ll'}\frac{2}{2l+1}\frac{\Gamma(l+|m|+1)}{\Gamma(l-|m|+1)}$$

であるから

$$N_\theta=\left\{\left(\frac{2l+1}{2}\right)\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ととればよい．このようにして，つぎの定理が得られる．

定理 5.1　シュレディンガーの波動方程式の解の角度成分は

$$Y(\theta,\varphi)=Q(\varphi)P(\theta)$$

$$=\left\{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right\}^{\frac{1}{2}}P_l^m(\cos\ \theta)e^{im\varphi} \qquad (5.25)$$

$$(l=0, 1, 2, \cdots, m=-l, -l+1, \cdots, 0, \cdots, l-1, l)$$

ここで $P_l^m(z)$ はルジャンドルの陪関数である．

C.（5.6）の解

波動関数 ψ の動径 r に依存する部分 $\chi(r)$ は（5.13）において $K=l(l+1)$（l は 0 または正の整数）とした微分方程式

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\chi}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+E\right)\chi=l(l+1)\chi \qquad (5.26)$$

をみたす．ここで，正数 a と n をつぎの式で導入する．

$$a=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2}, \quad -\frac{1}{n^2a^2}=\frac{2\mu E}{\hbar^2} \quad \left(\hbar=\frac{h}{2\pi}\right) \tag{5.27}$$

a はボーア半径とよばれる数で，水素原子の大きさの目安を与えるものである．また，エネルギーの固有値 E は核と電子の間に引力が作用しているときは負，斥力の場合には正であるが，ここでは水素原子が定常な状態，すなわち束縛状態にある場合を考えるのであるから負であるとする．したがって，n は正数である．このようにして，(5.26) はパラメータ a，n，l を含む微分方程式

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\chi}{dr}\right)+\left\{-\frac{r^2}{n^2a^2}+\frac{2r}{a}-l(l+1)\right\}\chi=0 \tag{5.28}$$

にかき直される．ここで $\rho=\dfrac{2}{na}r$ とおくと

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\chi}{d\rho}\right)+\left\{-\frac{\rho^2}{4}+n\rho-l(l+1)\right\}\chi=0$$

となり，さらに変換

$$\chi(\rho)=\rho^l e^{-\frac{\rho}{2}}L(\rho) \tag{5.29}$$

を施すと，L に関する微分方程式

$$\rho\frac{d^2L}{d\rho^2}+\{2(l+1)-\rho\}\frac{dL}{d\rho}+\{n-(l+1)\}L=0 \tag{5.30}$$

が得られる．これは $\alpha=l+1-n, \gamma=2(l+1)$ とする合流型超幾何微分方程式である．$\gamma=2(l+1)$ は正の整数であることに注意して，(5.30) の基本解を求めると，§4.1 A から

$$\begin{aligned} L_1(\rho)&=F(l+1-n, 2(l+1), \rho) \\ L_2(\rho)&=F(l+1-n, 2(l+1), \rho)\log\rho+F_1(l+1-n, 2(l+1), \rho) \end{aligned} \tag{5.31}$$

である．ここで，$F(\alpha,\gamma,\rho)$ は合流型超幾何級数，$F_1(\alpha,\gamma,\rho)$ は ρ^{-2l-1} の項から始まる ρ のべき級数である．ところが，$\chi(\rho)$ が波動関数の構成要素であるためには $\rho=0$ で有限でなければならない．したがって，(5.29)，(5.31) から $L_2(\rho)$ は不適であることがわかる．さらに

$$\int_0^\infty \chi(r)\bar{\chi}(r)r^2dr<\infty$$

をみたさなければならない．

定理 4.5 において $F(\alpha,\gamma,z)$ の $z\to\infty$ のときの漸近展開が得られている．す

なわち

$$F(\alpha,\gamma,z)\sim e^{\pi i\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\alpha}+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{z}z^{\alpha-\gamma}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi\right)$$

したがって，$L_1(\rho)$ は $\rho\to\infty$ のとき

$$L_1(\rho)=F(l+1-n,2(l+1),\rho)\sim\frac{\Gamma(2(l+1))}{\Gamma(l+1-n)}e^{\rho}\rho^{-(n+l+1)}\quad(\arg\rho=0)$$

となる．よって

$$\chi(\rho)=\rho^{l}e^{-\frac{\rho}{2}}L_1(\rho)\sim\frac{\Gamma(2(l+1))}{\Gamma(l+1-n)}e^{\frac{\rho}{2}}\rho^{-(n+1)}$$

を得るが，これは明らかに $\int_0^{\infty}\chi\bar{\chi}r^2dr<\infty$ をみたさない．この積分が収束するためには，$L_1(\rho)$ が ρ の多項式にならなければならない．すなわち，$\alpha=l+1-n$ が 0 かまたは負の整数でなければならない．したがって

$$n=l+1+n'\quad(n'=0,1,2,\cdots)$$

とかくことができる．(5.27) からこの n に対してエネルギー E は

$$E_n=-\frac{\mu e^4}{32\pi^2\varepsilon_0{}^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{5.32}$$

で与えられる．

n は系のエネルギーを決める量子数で**主量子数**とよばれる．主量子数 n に対して $l=0,1,\cdots,n-1$ のように n 個の異なった l の値が可能である．(5.32) のように，とり得るエネルギーの値が**離散的** (discrete) になることを**エネルギーの量子化**という．

§4.4 で述べたラゲールの多項式を用いて $\chi(\rho)$ を表現しよう．(4.41) と (4.42) から k 次のラゲールの多項式は

$$\begin{aligned}L_k(z)&=\Gamma(k+1)F(-k,1,z)\\&=k!\left\{1-\frac{k}{1}z+\frac{k(k-1)}{(2!)^2}z^2+\cdots\right.\\&\quad\left.+\frac{(-1)^k k(k-1)\cdots(k-h+1)}{(h!)^2}z^h+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}z^k\right\}\\&=e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})\end{aligned}$$

で与えられる．$L_k(z)$ はラゲールの微分方程式

$$z\frac{d^2L_k}{dz^2}+(1-z)\frac{dL_k}{dz}+kL_k=0$$

をみたす．この $L_k(z)$ を s 回微分したものを $L_k^{(s)}(z)$ とかくと，$L_k^{(s)}(z)$ は

$$z\frac{d^2L_k^{(s)}}{dz^2}+(s+1-z)\frac{dL_k^{(s)}}{dz}+(k-s)L_k^{(s)}=0 \tag{5.33}$$

をみたす．(5.30) と比較して $k=n+l$，$s=2l+1$ とおき $z=\rho$ とすると $L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)$ は (5.30) の解である．

そこで変換 (5.29) をもとにもどし，$\rho=2r/na$ とおき，さらに係数 N_r をかけて (5.28) の解を

$$\chi(r)=N_r\left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}}L_{n+l}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{na}\right) \tag{5.34}$$

とかき表そう．ここで N_r は規格化条件

$$\int_0^\infty \chi(r)\overline{\chi(r)}r^2dr=1 \tag{5.35}$$

をみたすようにとる．

一般に，(5.33) の解 $L_k^{(s)}(z)$ はつぎの直交関係式をみたす．

$$\int_0^\infty z^{s+1}e^{-z}L_k^{(s)}(z)L_{k'}^{(s)}(z)dz=\begin{cases}\dfrac{(2k-s+1)(k!)^3}{(k-s)!} & (k=k')\\ 0 & (k\neq k')\end{cases} \tag{5.36}$$

この等式の証明は §5.5 例題 B で行うこととし，(5.34) の N_r を求める．

$$\int_0^\infty \chi(r)\overline{\chi(r)}r^2dr=|N_r|^2\int_0^\infty\left(\frac{2r}{na}\right)^{2l}e^{-\frac{2r}{na}}L_{n+l}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{na}\right)L_{n+l}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{na}\right)r^2dr$$

$$=\left(\frac{na}{2}\right)^3|N_r|^2\int_0^\infty \rho^{2l+2}e^{-\rho}L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)L_{n+l}^{(2l+1)}(\rho)d\rho$$

ここで，(5.36) を用いると，$k=n+l$，$s=2l+1$，$z=\rho$ として

$$=|N_r|^2\left(\frac{na}{2}\right)^3\frac{2n\{(n+l)!\}^3}{(n-l-1)!}$$

であるから．N_r は

$$N_r=\left[\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ととればよいことになる．

定理 5.2　シュレーディンガーの波動方程式の動径成分は

$$\chi(r)=\left[\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}}L_{n+l}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{na}\right) \tag{5.37}$$

で与えられる．ここで，$L_{n+l}{}^{(2l+1)}(z)$ はラゲールの多項式 $L_{n+l}(z)$ を $2l+1$ 回微分して得られる $n-l-1$ 次多項式である．また，n と l は

$$n=1, 2, 3, \cdots$$
$$l=0, 1, 2, \cdots, n-1$$

の値をとる．

このようにして，r, θ, φ に関する微分方程式は解かれ，結局水素原子の波動関数はつぎのように表される．

定理 5.3　水素原子の波動関数は3つの量子数 l，m，n を添字として

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)=N_{n,l,m}\left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}} L_{n+l}{}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{na}\right) P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{5.38}$$

$$N_{n,l,m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}N_r N_\theta=\left[\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{\frac{1}{2}}$$

と表される．ここで，n，l，m は

$$n=1, 2, 3, \cdots$$
$$l=0, 1, 2, \cdots, n-1$$
$$m=-l, -l+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, l$$

の値をとる．

5.4　水素原子の波動関数の特徴

A. 波動関数 $\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi)$ は水素原子の電子の原子核に対する運動状態を表している．これら3つの量子数 n，l，m および相対論的量子論から導かれるスピン（電子の右回転，左回転に対応する）の4つの量子数によって，水素原子の起こり得る全ての状態が特定される．系のエネルギーは主量子数 n だけに依存し，l，m にはよらない．1つの E_n に対して

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=n^2$$

個の状態があり，これらは縮退した状態をつくっているという．$l=0, 1, 2, \cdots$ の状態はそれぞれ s, p, d, ⋯ 状態とよばれ，普通，主量子数 n を最初につけて 1s,

2 s, 2 p, 3 d, … 等と表す．

$n=1$ の場合は水素原子の取り得る最低のエネルギー状態を表し，これを基底状態という．$E_1=-2.17\times10^{18}$[J] である．

表 5.2　波動関数（$\rho=2r/na$）

スペクトル項	量子数 (n, l, m)	χ_{nl}（動径成分）	Y_{lm}（角度成分）	$P(r)$
1s	1　0　0	$-\frac{1}{\sqrt{a^3}}2e^{-\frac{\rho}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{\rho^2}{a}e^{-\rho}$
2s	2　0　0	$-\frac{1}{2\sqrt{2a^3}}(2-\rho)e^{-\frac{\rho}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{8a}\rho^2(2-\rho^2)e^{-\rho}$
2p	2　1　0	$-\frac{1}{2\sqrt{6a^3}}\rho e^{-\frac{\rho}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\cos\theta$	$\frac{1}{24a}\rho^4e^{-\rho}$
	2　1　±1		$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$	
3s	3　0　0	$-\frac{1}{9\sqrt{3a^3}}(6-6\rho+\rho^2)e^{-\frac{\rho}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{108a}\rho^2(6-6\rho+\rho^2)^2\cdot e^{-\rho}$
3p	3　1　0	$-\frac{1}{9\sqrt{6a^3}}\rho(4-\rho)e^{-\frac{\rho}{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}\cos\theta$	$\frac{1}{216a}\rho^4(4-\rho)^2\cdot e^{-\rho}$
	3　1　±1		$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$	
3d	3　2　0	$-\frac{1}{9\sqrt{30a^3}}\rho^2e^{-\frac{\rho}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2\pi}}(3\cos^2\theta-1)$	$\frac{1}{1080a}\rho^6e^{-\rho}$
	3　2　±1		$\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$	
	3　2　±2		$\frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$	

表 5.2 に $n=1, 2, 3$ に対する規格化された波動関数を動径成分と角度成分に分けて示した．これをみると，s 状態（$l=0$）以外のものは全て角度依存性をもっている．波動関数の絶対値の 2 乗は確率密度を与えるから，電子がみいだされる確率も角度に依存することになる．また，電子が r と $r+dr$ の球殻の部分にみいだせる確率を $P(r)dr$ とすると

$$P(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\phi\bar{\phi}r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=r^2\chi(r)\overline{\chi(r)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y(\theta,\varphi)Y(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=r^2\chi(r)\overline{\chi(r)}$$

で与えられる．$P(r)$ のグラフを図5.1に示した．

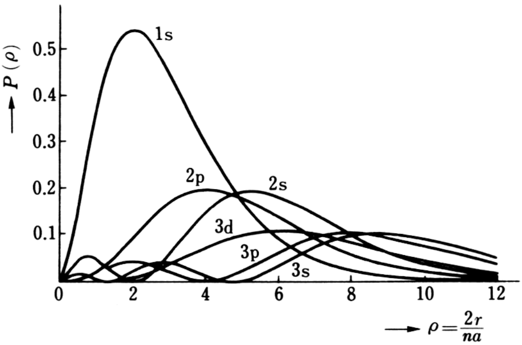


図 5.1　$P(\rho)$　$(a=1)$

例 5.1　ラゲールの多項式 $L_0(z)=1$，$L_1(z)=1-z$，$L_2(z)=2-4z+z^2$，$L_3(z)=6-18z+9z^2-z^3$，… を用いて，$L_1^{(1)}(z)=\dfrac{d}{dz}L_1(z)=-1$，$L_2^{(1)}(z)=\dfrac{d}{dz}L_2(z)=-4+2z$ などが得られる．したがって

$$\psi_{1,0,0}=N_{1,0,0}e^{-\frac{r}{a}}L_1^{(1)}\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{-1}{\sqrt{a^3\pi}}e^{-\frac{r}{a}}$$

$$P(r)=r^2\psi_{1,0,0}{}^2\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4}{a^3}r^2e^{-\frac{2r}{a}}=\frac{\rho^2}{a}e^{-\rho}$$

同様に

$$\psi_{2,1,0}=N_{2,1,0}\left(\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}L_3^{(3)}\left(\frac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta)$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}}\left(\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}\cos\theta$$

なお，ここで $L_3^{(3)}(z)=-3!$，$P_1(z)=z$（ルジャンドルの多項式）である．このとき

$$P(r)=r^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi_{2,1,0}{}^2(r,\theta,\varphi)d\theta d\varphi$$

$$=\frac{1}{32\pi a^3}\frac{r^4}{a^2}e^{-\frac{r}{a}}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{r^4}{24a^5}e^{-\frac{r}{a}}=\frac{1}{24a}\rho^4e^{-\rho}$$

が得られる.

B. $\psi(r,\theta,\varphi)=\chi_{n,l}(r)Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ は水素原子の電子の陽子に対する運動状態を表す波動関数である. これは3つの量子数 n, l, m によって, その状態が規定される. このとき, n は**エネルギーレベル** E_n を定める. では l と m はいかなる量を定めるかを考えてみる.

角運動量演算子 (5.4) は極座標でかくと

$$\boldsymbol{l}_x=i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\boldsymbol{l}_y=i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\boldsymbol{l}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

となる. したがって

$$\boldsymbol{l}^2=\boldsymbol{l}_x{}^2+\boldsymbol{l}_y{}^2+\boldsymbol{l}_z{}^2=-\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$

となる.

一方, $Y(\theta,\varphi)=P(\theta)Q(\varphi)$ は方程式

$$\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}Y_{l,m}=-l(l+1)Y_{l,m}$$

をみたすから

$$\boldsymbol{l}^2Y(\theta,\varphi)=l(l+1)\hbar^2Y(\theta,\varphi)$$

また

$$\boldsymbol{l}_xQ(\varphi)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}Q(\varphi)=m\hbar Q(\varphi)$$

が成り立つ. 演算子 $\boldsymbol{l}^2$ は角運動量の大きさの2乗に対応するから, $Y(\theta,\varphi)$ という状態において角運動量の大きさを測定すれば, 確定値 $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ が得られることがわかる. また, $Q(\varphi)$ という状態において角運動量の z 成分を観測すれば, 確定値 $m\hbar$ が得られることを示している. したがって, 方向量子数 l, 磁気量子数 m は角運動量の大きさとその z 軸成分を与えるものである.

本章では超幾何関数および合流型超幾何関数の理論の応用として, 最も簡単な系である陽子と1個の電子からなる水素原子の量子力学的なとり扱いを述べた. もっと多くの電子をもった原子に対しても同様な方法が基本になるが, 波動方程式を解くのはきわめて困難であり, 実際には実験データを手がかりにいろいろな

近似計算が試みられている．また量子力学は，原子的系（$\geqq 10^{-8}$ cm）での実験事実を解明するために完成された理論体系である．原子系よりはるかに小さい素粒子系（$\leqq 10^{13}$ cm）での諸現象を理解するための力学は相対論的場の量子力学といれている．

5.5　例題

A．一次元調和振動子

量子力学的な取り扱いとしてもう1つの例，一次元調和振動子（1-dim harmonic oscillator）を取り上げよう．この場合，波動関数はエルミートの多項式（4.33）を用いて表される．図5.2でみられるように，質量 m の物体がバネで固定点に結びつけられていて，フックの法則（バネの張力はその伸びに比例する）に従って微小運動する場合，調和振動が実現する．質点の運動方程式は，xをバネの自然の長さ a からの変位とすると

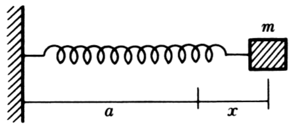


図 5.2

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx \quad (c\text{ はバネの力定数})$$

となる．これを積分すると

$$x=A\sin(\omega t+\alpha),\quad \omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$$

が得られる．A と α は積分定数で系のエネルギー，および初期条件によって定められる．これがニュートン力学による取り扱いである．

つぎに，この系の量子力学的な取り扱いを考えよう．まず，シュレディンガーの波動方程式を求める．質点に働く力は$-cx$であるから，ポテンシャルエネルギーは $\frac{1}{2}cx^2$ となる．質点の速度を v とすると，運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ であるから，全エネルギー E は

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}cx^2$$

で与えられる．したがって，波動方程式は（5.7）から

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}cx^2\right)\phi=0 \tag{5.39}$$

となる．ここで，変数変換

$$z=\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}x,\quad \lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}\quad\left(\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}\right) \tag{5.40}$$

により，(5.39) は

$$\frac{d^2\phi}{dz^2}+(\lambda-z^2)\phi=0$$

となる．

$$\phi(z)=e^{-z^2/2}v(z)$$

とおくと，エルミートの微分方程式

$$\frac{d^2v}{dz^2}-2z\frac{dv}{dz}+(\lambda-1)v=0$$

が得られる．解は (4.32) から合流型超幾何関数を用いて

$$\begin{aligned} v_1(z)&=F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},z^2\right)\quad\left(\nu=\frac{\lambda-1}{2}\right)\\ v_2(z)&=zF\left(-\frac{\nu-1}{2},\frac{3}{2},z^2\right)\end{aligned} \tag{5.41}$$

で与えられる． われわれが求める波動関数は $\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\phi}\phi dz<\infty$ をみたさなければならない．ところが，定理 4.5 およびそのつぎにかかれたことから，たとえば $z\to+\infty$ のとき，$F(\alpha,\gamma,z)\sim\dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}$ である．したがって，$\phi(z)$ は $z\to+\infty$ のとき

$$\phi_1(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}v_1(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}F\left(-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},z^2\right)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}e^{\frac{z^2}{2}}z^{-(\nu+1)}$$

$$\phi_2(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}v_2(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}zF\left(-\frac{\nu-1}{2},\frac{3}{2},z^2\right)\sim\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu-1}{2}\right)}e^{\frac{z^2}{2}}z^{-(\nu+3)}$$

をみたし，$z\to+\infty$ のとき，$e^{z^2/2}$ の大きさで ∞ となることがわかる．このことから $\phi_1(z)$，$\phi_2(z)$ が波動関数となり得るのは，(5.41) の F が z の多項式となるときのみである．すなわち，n を 0 または正の整数として

$$\lambda=2n+1 \tag{5.42}$$

をみたす場合のみである．$v_1(z)$ と $v_2(z)$ を多項式すなわちエルミートの多項式 $H_n(z)$ として，一次元調和振動子の波動関数は

$$\phi_n(x)=N_nH_n(z)e^{-\frac{z^2}{2}}=N_nH_n\left(\left[\frac{m\omega}{\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}x\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \tag{5.43}$$

で与えられる．N_n は規格化定数で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}_n(x)\phi_n(x)dx = 1$$

をみたすようにとる．(4.36) によれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(z)H_n(z)e^{-z^2}dz = 2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{m,n}$$

であるから

$$N_n = \left[\frac{\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,n\,!\,2^n}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.44}$$

のようにとればよい．固有エネルギーは (5.40) と (5.42) から

$$E_n = \frac{1}{2}\hbar\omega\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{5.45}$$

となる．(4.34)，(5.43) および (5.44) から初めの5つの波動関数は

$$\phi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\alpha}\, x e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

$$\phi_2(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}}(2\alpha x^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

$$\phi_3(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\alpha}{3}}\, x(2\alpha x^2 - 3)e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

$$\phi_4(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{6}}(4\alpha^2 x^4 - 12\alpha x^2 + 3)e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}$$

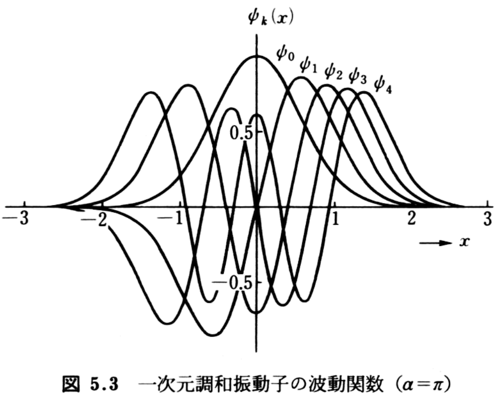


図 5.3　一次元調和振動子の波動関数 ($\alpha = \pi$)

となる（図 5.3）．ただし，$\alpha=\dfrac{m\omega}{\hbar}$ である．

B. 直交関係（5.36）の証明

$$I=\int_0^\infty z^{s+1}e^{-z}\{L_k{}^s(z)\}\{L_{k'}{}^s(z)\}dz=\begin{cases}\dfrac{(2k-s+1)(k!)^3}{(k-s)!} & (k=k')\\ 0 & (k\neq k')\end{cases} \tag{5.36}$$

を示す．$k=k'$ の場合を計算するが，$k\neq k'$ の場合はより簡単である．(5.36) の積分を（4.43）を用いてかき直し，部分積分を1回行うと

$$=\left[z^{s+1}e^{-z}\frac{d^s}{dz^s}\left\{e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})\right\}\cdot\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left\{e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})\right\}\right]_0^\infty$$

$$-\int_0^\infty\frac{d}{dz}\left[z^{s+1}e^{-z}\frac{d^s}{dz^s}\left\{e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})\right\}\right]\cdot\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left\{e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})\right\}dz$$

第1項は $z^{s+1}e^{-z}\times\{z$ の多項式$\}$ とかけるから0となる．これを s 回くり返して

$$I=(-1)^s\int_0^\infty\frac{d^s}{dz^s}\left[z^{s+1}e^{-z}\frac{d^s}{dz^s}\left\{e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})\right\}\right]\cdot e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})dz$$

上式の被積分関数は

$$\{z\text{ の多項式}\}\ e^{-z}\cdot e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})=\{z\text{ の多項式}\}\cdot\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})$$

という形をもっていることがわかる．そこで部分積分をくり返しすことにより

$$\int_0^\infty z^l\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})dz=\begin{cases}0 & (k>l)\\ (-1)^kl(l-1)\cdots(l-k+1)l! & (k\leqq l)\end{cases} \tag{5.46}$$

となることがわかる．また

$$\frac{d^s}{dz^s}\left[z^{s+1}e^{-z}\frac{d^s}{dz^s}\left\{e^z\frac{d^k}{dz^k}(z^ke^{-z})\right\}\right] \tag{5.47}$$

は

$$\{z\text{ の }k+1\text{ 次多項式}\}\ e^{-z}$$

とかけることと（5.46）に注意すると，I に関与するのは（5.47）の $z^{k+1}e^{-z}$ と z^ke^{-z} の項だけであることになる．(5.47) から巾の高い2項を計算すると

$$(-1)^{k+s}[k(k-1)\cdots(k-s+1)\{z^{k+1}e^{-z}-(k^2+s)z^ke^{-z}\}]$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}I&=k(k-1)\cdots(k-s+1)[\{(k+1)!\}^2-(k^2+s)(k!)^2]\\&=k(k-1)\cdots(k-s+1)(k!)^2(2k-s+1)\end{aligned}$$

$$= \frac{(2k-s+1)(k!)^3}{(k-s)!}$$

を得る.

第6章 ベッセル関数

ベッセル関数は多くの特殊関数の中でも重要な関数であり，殊に工学の分野で幅広く応用されてきた．ベッセル関数は合流型超幾何微分方程式に帰着されるベッセルの微分方程式の解として定義される．ここではベッセル関数の基本的な性質を合流型超幾何関数の積分表示から導く．

6.1 ベッセル関数

ヘルムホルツの微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V+\kappa V=0$$

は極座標 (r,θ,φ)：$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$ を用いると

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\kappa+\frac{1}{r^2}\Lambda\right\}V=0$$

$$\Lambda=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

とかける．$V=R(r)Y(\theta,\varphi)$ と変数分離して，$R(r)$ に対する方程式を求めると

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\kappa-\frac{l}{r^2}\right\}R(r)=0$$

となる．ここで l は変数分離定数である．$R=r^{-\frac{1}{2}}u$，$r=z/\sqrt{\kappa}$，$\dfrac{1}{4}+l=\nu^2$ とおくと

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u=0 \qquad (6.1)$$

を得る．または，円筒座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$ を用いると

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\kappa\right\}V=0$$

となり，$V=R(r)e^{i(\nu\theta+hz)}$ とおけば，$R(r)$ に対する方程式は

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\left(\kappa-h^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\right\}R(r)=0$$

ここで，$R=u$，$r=z/\sqrt{\kappa-h^2}$ とすると，(6.1) が得られる．微分方程式 (6.1) を**ベッセル** (F. W. Bessel (1784–1846)) **の微分方程式**とよぶ．

A. (6.1) は $z=0$ を確定特異点 (特性根は $\pm\nu$) とし，∞ を不確定特異点としてもつ．そこで (6.1) に変換

$$u=z^{\nu}e^{-iz}v(z),\quad 2iz=t$$

を施せば

$$t\frac{d^2v}{dt^2}+(2\nu+1-t)\frac{dv}{dt}-\frac{2\nu+1}{2}v=0 \tag{6.2}$$

となり，合流型超幾何微分方程式 $\left(\alpha=\nu+\dfrac{1}{2},\gamma=2\nu+1\right)$ に帰着される．$2\nu+1$ が整数でないとき，(6.2) は線形独立な 2 つの解として，$F\left(\nu+\dfrac{1}{2},2\nu+1,2iz\right)$ および $z^{-2\nu}F\left(-\nu+\dfrac{1}{2},1-2\nu,2iz\right)$ をもつ．定数を適当にとり

$$\begin{aligned}
J_{\nu}(z)&=\frac{z^{\nu}e^{-iz}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1,2iz\right)\\
J_{-\nu}(z)&=\frac{z^{\nu}e^{-iz}\cdot z^{-2\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}F\left(-\nu+\frac{1}{2},-2\nu+1,2iz\right)\\
&=\frac{z^{-\nu}e^{-iz}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}F\left(-\nu+\frac{1}{2},-2\nu+1,2iz\right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

と定義すると，ν が整数でないとき，$J_{\nu}(z)$，$J_{-\nu}(z)$ はベッセルの微分方程式 (6.1) の線形独立な 2 つの解である．$J_{\nu}(z)$ を ν 次の**ベッセル関数** (Bessel function) という．

B. ベッセル関数の積分表示を求めよう．合流型超幾何関数の積分表示の式 (4.9) と比較すると

$$w(z)=A'z^{\nu}e^{-iz}\int_{C'}s^{\nu-\frac{1}{2}}(1-s)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{2izs}ds \tag{6.4}$$

は (6.1) の解となる．ここで，A' は後で適当に定められる定数，また積分路 C' は (4.8) から

$$[s^{\nu+\frac{1}{2}}(1-s)^{\nu+\frac{1}{2}}e^{2izs}]_{C'}=0 \tag{6.5}$$

をみたすように選ぶ．ただし，$[\ ]_{C'}$ は前と同じように，$[\ ]$ の中の関数の積分路

C' の終点と始点における値の差を表すものとする．

変換 $s=(1+t)/2$ を施せば，(6.4)(6.5) はつぎのようになる．

$$w(z)=Az^{\nu}\int_C(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{izt}dt \tag{6.6}$$

ただし，C は

$$[(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}e^{iz(t+1)}]_C=0 \tag{6.7}$$

をみたす t-平面上の曲線である．(6.6) は C および A を適当にとることにより，$J_\nu(z)$，$J_{-\nu}(z)$ を表すことを示そう．

まず，C として図 6.1 および図 6.2 のように，-1 と 1 を 8 の字型にまわる曲線 C_1 と，α 方向の∞からやってきて -1 と 1 を中に含み再び α 方向の∞にもどる C_2 をとれば，条件 (6.7) をみたす．ただし，$(1-t)^{\nu+\frac{1}{2}}(1+t)^{\nu+\frac{1}{2}}$ の分枝は P_1 と P_2 においてそれぞれ $\arg(t-1)=\arg(t+1)=0$ によって定める．また，C_2 について積分路が∞にのびる方向 α は $\mathrm{Re}\, izt<0$ をみたすようにとるものとする．

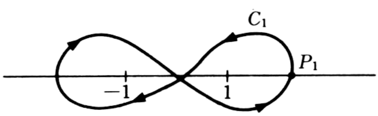


図 6.1 C_1

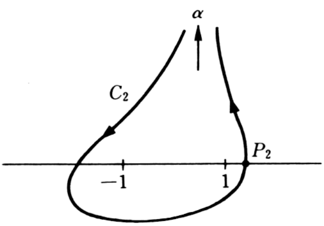


図 6.2 C_2

$$w_1(z)=A_1z^{\nu}\int_{C_1}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt \tag{6.8}$$

とおく．C_1 を $\tilde{C}_1$ (図 6.3) のように変形してもよい．$\mathrm{Re}\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)>0$ ならば，± 1 のまわりの円周の半径を 0 にすることにより，円周上の積分の値は 0 となる．線分 $[-1,1]$ の上での $\arg(t-1)$ の変化を $\arg(1-t)=0$ と比較して下の表を得る．

	a	1^+	b	-1^-	a
$\arg(t-1)$	$-\pi$		π		π
$\arg(t+1)$	0		0		-2π
$\arg(t^2-1)$	$-\pi$		π		$-\pi$

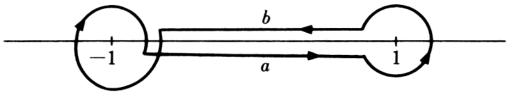


図 6.3　$\tilde{C}_1$

よって

$$w_1(z)=A_1z^{\nu}\{e^{-\pi i\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}-e^{\pi i\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}\}\int_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$=2iA_1z^{\nu}\sin\pi\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\int_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

を得る．変換 $t=\cos\varphi$ を施し，またガンマ関数の公式（7.6）を用いて

$$=\frac{2\pi iA_1z^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\int_0^{\pi}e^{iz\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2\pi iA_1z^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(iz)^m}{m!}\int_0^{\pi}\cos^m\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

m が奇数のときは

$$\int_0^{\pi}\cos^m\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\}\cos^m\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=0$$

および m が偶数（$=2p$）のとき，公式（7.4），（7.5）を用いると

$$\int_0^{\pi}\cos^{2p}\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}\varphi\sin^{2\nu}\varphi d\varphi=B\left(\nu+\frac{1}{2},\ p+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+p+1)}$$

となり

$$w_1(z)=\frac{2\pi iA_1z^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{(2p)!\Gamma(\nu+p+1)}(-z^2)^p$$

が得られる．これは $z=0$ で z^{ν} を除いて正則であるから，$J_\nu(z)$ の定数倍でなければならない．そこで，$J_\nu(z)z^{-\nu}$ と $w_1(z)z^{-\nu}$ を $z=0$ で比較することにより

$$A_1=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(\nu+1)}{2\pi i\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^\nu}$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned}J_\nu(z)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{C_1}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\pi e^{iz\cos\varphi}\sin^{2\nu}\varphi d\varphi\quad\left(\nu+\frac{1}{2}>0\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{(2p)!\,\Gamma(\nu+p+1)}(-z^2)^p\\&=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p\end{aligned}\tag{6.9}$$

となる．(6.9) において，ν の代わりに $-\nu$ とおけば

$$\begin{aligned}J_{-\nu}(z)&=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\int_{C_1}e^{izt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}dt\\&=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,\Gamma(-\nu+p+1)}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p\end{aligned}\tag{6.10}$$

が得られる．

つぎに，積分路 C_2 によって定義される関数を考えよう．

$$w_2(z)=A_2z^\nu\int_{C_2}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\tag{6.11}$$

とおく．C_2 について積分路が∞へいく方向を α とすると，$\mathrm{Re}\,izt<0$ となるためには $\arg z=\theta$ として

$$-2\pi<\alpha+\theta<-\pi$$

また，図 6.2 において P_2 で $\arg t=0$ となることから

$$\alpha<0<\alpha+2\pi\quad\therefore\quad-2\pi<\alpha<0$$

でなければならない．したがって

$$-2\pi<\theta<\pi$$

すなわち，C_2 に関しては $-2\pi<\theta<\pi$ の条件がつく．

ここで，わかりやすくするため，$\alpha+\theta=-\frac{3}{2}\pi$ としよう．

$$w_2(z)=A_2 z^{\nu}\int_{C_2} e^{izt}t^{2\nu-1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

において，$t=\dfrac{\tau}{z}\exp\left(-\dfrac{3}{2}\pi i\right)$ とおけば，$t=\pm 1$ には $\tau=\pm zi$ が対応し

$$w_2(z)=A_2 z^{-\nu}\int_{\tilde{C}_2} e^{-\tau}\tau^{2\nu-1}\left(1+\frac{z^2}{\tau^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{-3\pi\nu}d\tau \qquad (6.12)$$

ここで，積分路 $\tilde{C}_2$ は τ-平面上において，$+\infty$ 方向からきて $\pm iz$ を正の向きに回って $+\infty$ の方向にもどっていく（図 6.4）.

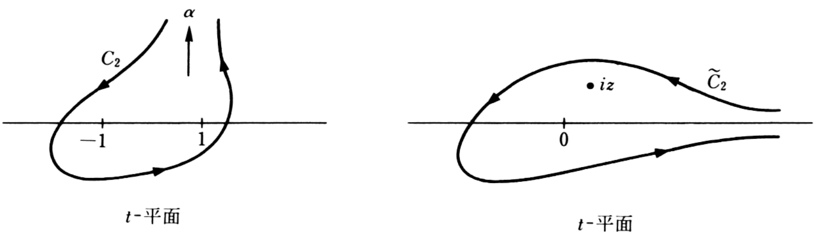


図 6.4　C_2 と $\tilde{C}_2$

(6.11) の積分の項は $z=0$ で正則となることから，$J_{-\nu}(z)$ の定数倍でなければならない．$z^{-\nu}$ の係数を求めると，ガンマ関数の公式 (7.9)，(7.6)，(7.8) から

$$e^{-3\nu\pi i}\int_{\tilde{C}_2} e^{-\tau}\tau^{2\nu-1}d\tau=e^{-3\nu\pi i}2i\sin 2\pi\nu\cdot e^{2\nu\pi i}\Gamma(2\nu)$$

$$=\frac{2\pi i e^{-\nu\pi i}}{\Gamma(1-2\nu)}=e^{-\nu\pi i}\frac{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^{2\nu}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(1-\nu)}$$

となる．(6.10) と比較することにより，$J_{-\nu}(z)$ の別の積分表示として

$$J_{-\nu}(z)=e^{\nu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^{\nu}}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{C_2} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt \quad (-2\pi<\arg z<\pi) \qquad (6.13)$$

が得られる．以上をまとめてつぎの定理が得られた．

定理 6.1　ベッセルの微分方程式 (6.1) は ν が整数でないとき，線形独立な 2 つの解としてベッセル関数 $J_{\pm\nu}(z)$ をもつ．この $J_{\pm\nu}(z)$ はつぎのような級数展開と積分表示をもつ．

$$J_\nu(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{C_1}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p \qquad (6.9)$$

$$J_{-\nu}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\int_{C_1}e^{izt}(t^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,\Gamma(-\nu+p+1)}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p \qquad (6.10)$$

また

$$J_{-\nu}(z)=e^{\nu\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}\,2^\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{C_2}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt \quad (-2\pi<\arg z<\pi) \qquad (6.13)$$

とも表される．ただし，C_1，C_2 は図 6.1，図 6.2 で示された積分路である．

6.2　ハンケル関数とその漸近展開

A.　ベッセル関数の $z\to\infty$ のときの漸近展開は，合流型超幾何関数と同じように，ハンケル関数とよばれるベッセルの微分方程式の 2 つの解の漸近展開を求めることに帰着される．C_3 と C_4 を図 6.5 のように $\mathrm{Re}\, izt\to-\infty$ をみたす方向 α の無限遠からやってきて 1 および -1 を 1 回りして α 方向の無限遠にもどる積分路とすると，条件 (6.6) をみたす．そこで

$$H_\nu{}^1(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{C_3}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt \quad (-\pi<\arg z<2\pi)$$

$$H_\nu{}^2(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi i\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{C_4}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt \quad (-2\pi<\arg z<\pi) \qquad (6.14)$$

とおくと，これらはベッセルの微分方程式の解である．Γ 関数の公式 (7.7) $\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)=\pi/\cos\nu\pi$ を用いると

$$H_\nu{}^1(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\cos\nu\pi}\int_{C_3}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

$$H_\nu{}^2(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{i\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\cos\nu\pi}\int_{C_4}e^{izt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

とかかれる．$H_\nu{}^1(z)$，$H_\nu{}^2(z)$ はそれぞれ第1種，第2種**ハンケル関数**（Hankel function of the first (second) kind, H. Hankel（1839–1873））とよばれる．

C_3 と C_4 上の P_3，Q_3，P_4，Q_4 において，それぞれ

$$\arg(t^2-1)=0,\ -\pi,\ 0,\ \pi$$

としておく．$\arg z=0$ とおくと，C_3 上では

$$\frac{\pi}{2}<\theta+\arg t+\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$$

また，C_3 は -1 を通らないために

$$-\pi<\arg t<\pi$$

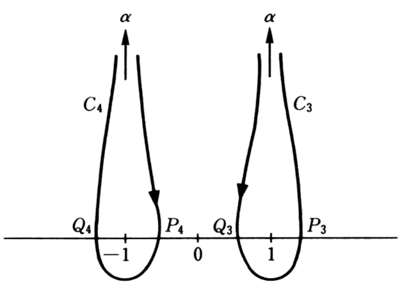


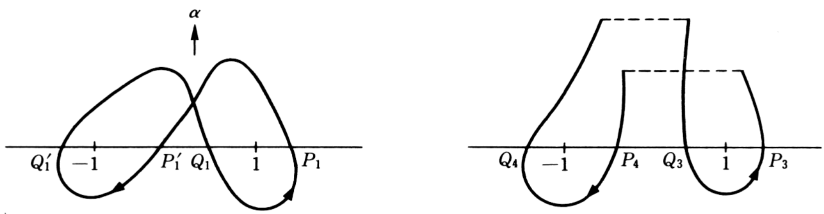
図 6.5　C_3 と C_4

この条件がともに成り立つためには

$$-\pi<\theta<2\pi$$

でなければならない．これが $H_\nu{}^1(z)$ の $\arg z$ に対する制限である．同様に C_4 が 1 を通らないための条件から $H_\nu{}^2(z)$ の $\arg z$ に関する制限が得られる．

B. ハンケル関数 $H_\nu{}^j(z)\,(j=1,2)$ とベッセル関数 $J_{\pm\nu}(z)$ の関係は C_1，C_2，C_3 および C_4 の変形を行うことによって得られる．たとえば，図6.6のように C_3 と C_4 を結ぶと C_1 が得られる．図は相似であり，対応する点で $\arg(t^2-1)$ は等し



C_1の変形　　C_3+C_4

図 6.6

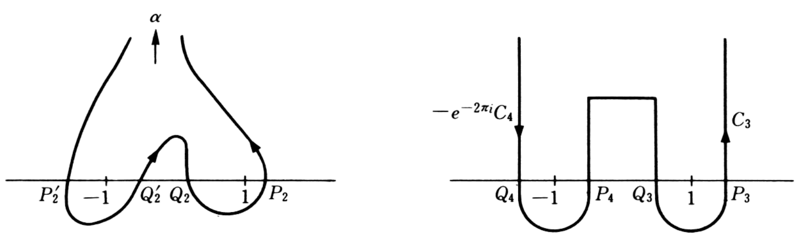
C_1	P_1	P_1'	Q_1'	Q_1
C_3+C_4	P_3	P_4	Q_4	Q_3
$\arg(t^2-1)$	0	π	0	$-\pi$

い．

したがって，(6.9)，(6.14) から

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2}\{H_\nu{}^1(z)+H_\nu{}^2(z)\} \tag{6.15}$$

が成り立つ．同様にして，図 6.7 から $C_2=C_3-e^{-2\pi i}C_4$ と考えられる（図 6.7）．



C_2の変形　　$C_3-e^{-2\pi i}C_4$

図 6.7

C_2	P_2	Q_2	P_2'	Q_2'
$C_3-e^{-2\pi i}C_4$	P_3	Q_3	P_4	Q_4
$\arg(t^2-1)$	0	$-\pi$	$-\pi$	-2π

したがって，(6.12) および (6.14) から

$$2e^{-\nu\pi i}J_{-\nu}(z)=\{H_\nu{}^1(z)-e^{-2\pi i\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}H_\nu{}^2(z)\}$$

すなわち

$$J_{-\nu}(z)=\frac{1}{2}\{e^{\nu\pi i}H_\nu{}^1(z)+e^{-\nu\pi i}H_\nu{}^2(z)\} \tag{6.16}$$

が得られる．(6.15) と (6.16) から，つぎの関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned} H_\nu{}^1(z)&=\frac{ie^{-\nu\pi i}}{\sin\nu\pi}J_\nu(z)-\frac{i}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(z)\\ H_\nu{}^2(z)&=\frac{-ie^{\nu\pi i}}{\sin\nu\pi}J_\nu(z)+\frac{i}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(z)\end{aligned} \tag{6.17}$$

C. ノイマン関数

(6.15)，(6.16) から，$\nu=n$（整数）ならば

$$J_n(z)=(-1)^nJ_{-n}(z)$$

となり，$J_n(z)$ と $J_{-n}(z)$ は線形独立でなくなってしまう．そこで，ν が整数の場合でも $J_n(z)$ と線形独立な解を求めるために

$$Y_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{6.18}$$

を定義し，これを**ノイマン関数** (Neuman function, C. G. Neumann (1832–1925)) という．$\nu=n$ の場合には（ロピタルの定理を適用し）

$$\begin{aligned} Y_n(z)&=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}\\ &=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right\}_{\nu=n}\end{aligned} \tag{6.19}$$

によって定義する．$Y_n(z)$ の級数展開を求めておこう．(6.9) と (7.30) を用いて

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\right]_{\nu=n}&=\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2p}\right\}\right]_{\nu=n}\\ &=\sum_{p=0}^{\infty}\left[(-1)^p\left\{\log\frac{z}{2}-\frac{\Gamma'(\nu+p+1)}{\Gamma(\nu+p+1)}\right\}\right.\\ &\qquad\left.\frac{1}{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2p}\right]_{\nu=n}\\ &=J_n(z)\left(\log\frac{z}{2}+\gamma\right)-\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right]\\ &\qquad\frac{1}{p!(n+p)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}\end{aligned}$$

つぎに，$J_{-\nu}(z)$ の微分は

$$\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\right]_{\nu=n}=\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\nu+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2p}\right\}\right]_{\nu=n}$$

$$=-\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\nu+p+1)}\left\{\log\frac{z}{2}-\frac{\Gamma'(-\nu+p+1)}{\Gamma(-\nu+p+1)}\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2p}\right]_{\nu=n}$$

ここで，右辺の無限和を $p=0$ から $n-1$ までと，$p=n$ から∞までの和にわけて計算する．$\nu=n-\varepsilon$ とすると

$$\left[\frac{1}{\Gamma(-\nu+p+1)}\frac{\Gamma'(-\nu+p+1)}{\Gamma(-\nu+p+1)}\right]_{\nu=n}$$

$$=\left[\frac{1}{\Gamma(p-n-\varepsilon+1)}\frac{\Gamma'(p-n+\varepsilon+1)}{\Gamma(p-n+\varepsilon+1)}\right]_{\varepsilon=0}\quad(0\leqq p\leqq n-1)$$

$$=\left[\frac{1}{\Gamma(-m+\varepsilon)}\frac{\Gamma'(-m+\varepsilon)}{\Gamma(-m+\varepsilon)}\right]_{\varepsilon=0}\quad(m=n-p-1\geqq 0)$$

ここで

$$\Gamma(-m+\varepsilon)=\frac{(-1)^m\Gamma(1+\varepsilon)}{(m-\varepsilon)(m-1-\varepsilon)\cdots(1-\varepsilon)\varepsilon}$$

とかけるから，対数微分をとってみれば

$$\left[\frac{1}{\Gamma(-m+\varepsilon)}\frac{\Gamma'(-m+\varepsilon)}{\Gamma(-m+\varepsilon)}\right]_{\varepsilon=0}=\left[(-1)^m\frac{(m-\varepsilon)\cdots(1-\varepsilon)\varepsilon}{\Gamma(1+\varepsilon)}\left\{\frac{\Gamma'(1+\varepsilon)}{\Gamma(1+\varepsilon)}+\frac{1}{m-\varepsilon}+\cdots+\frac{1}{1-\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right]_{\varepsilon=0}$$

$$=(-1)^{m+1}m!$$

したがって

$$\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\right]_{\nu=n}=(-1)^n\left[\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p-n}-\left(\log\frac{z}{2}+\gamma\right)J_n(z)+\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{p!(n+p)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}\right]$$

このようにして (6.19) から

$$\pi Y_n(z)=-\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-p-1)!}{p!(z/2)^{n-2p}}+2\left(\log\frac{z}{2}+\gamma\right)J_n(z)-\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+p}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}}{p!(n+p)!}$$

とかかれることがわかる．なお，γ はオイラー常数である．

(6.18) に (6.15)，(6.16) を代入すると

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{2i}\{H_\nu{}^1(z) - H_\nu{}^2(z)\} \tag{6.20}$$

したがって，(6.15) と (6.20) から

$$\begin{aligned} H_\nu{}^1(z) &= J_\nu(z) + iY_\nu(z) \\ H_\nu{}^2(z) &= J_\nu(z) - iY_\nu(z) \end{aligned} \tag{6.21}$$

が得られた．なお，$J_\nu(z)$，$Y_\nu(z)$，$H_\nu(z)$ をそれぞれ第1種，第2種，第3種ベッセル関数ともいう．また，$Y_\nu(z)$ の代わりに $N_\nu(z)$ と表すこともある．

D. ハンケル関数の漸近展開

(6.14) において，$t = 1 + e^{\frac{\pi}{2}i}\dfrac{u}{z}$ とおきかえると

$$H_\nu{}^1(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}} e^{i\left(z + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int_{\tilde{C}_3} e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du$$

となる．積分路 $\tilde{C}_3$ は u- 平面上で方向 $\beta = \theta + \alpha - \dfrac{\pi}{2}$ の無限遠点からきて0のまわりを正の向きにまわり同じ方向にどっていくものとする (図6.8)．$0 < \theta + \alpha < \pi$ であったから $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であり，したがって，$u \to \infty$ のとき $\mathrm{Re}(-u) \to -\infty$ となる．さらに $\mathrm{Re}\left(\nu + \dfrac{1}{2}\right) > 0$ ならば，原点のまわりの小円に沿った積分は半径を0にすることにより消える．また，RQ 上の u は RP 上の値の $e^{-2\pi i}$ 倍であるから

$$H_\nu{}^1(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}} e^{i\left(z + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \int_0^{\infty e^{i\beta}} e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2z}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du$$

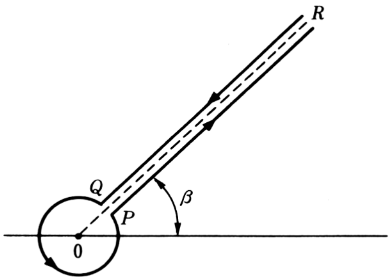


図 6.8　積分路 $\tilde{C}_3$

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}}e^{i\left(z+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\int_0^{\infty e^{i\beta}}e^{-u}(ue^{-2\pi i})^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\int_0^{\infty e^{i\beta}}e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}du \qquad (6.22)$$

が得られる．ここで，公式（7.7）

$$e^{i\nu\pi}(1+e^{-2\nu\pi i})=2\cos\nu\pi=\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}$$

を用いた．（6.21）の積分路は原点から β 方向の無限遠にのびる直線であるが，β だけ負の方向にまわして正の実軸にとっても値は変わらない．

$|z|$ が十分大きいとき，（6.22）で $1+\frac{iu}{2z}$ を 1 とすると積分は $\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$ となるので

$$H_\nu{}^1(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \quad (-\pi<\arg z<2\pi) \qquad (6.23)$$

とかくことができる．同様にして

$$H_\nu{}^2(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \quad (-2\pi<\arg z<\pi) \qquad (6.24)$$

(6.15)，（6.20）から

$$\begin{aligned} J_\nu(z)&\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ Y_\nu(z)&\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (-\pi<\arg z<\pi) \end{aligned} \qquad (6.25)$$

が導かれる．これらは漸近展開の第 1 項である．この先の項を求めるには，（6.22）の $\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ を 2 項級数に展開した項別積分をすれば得られる．

定理 6.2

$$H_\nu{}^1(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)}{p!\,\Gamma\left(\nu-p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{i}{2z}\right)^p \quad (-\pi<\arg z<2\pi)$$

$$(6.26)$$

$$H_\nu{}^2(z)\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)}{p!\,\Gamma\left(\nu-p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{-i}{2z}\right)^p \quad (-2\pi<\arg z<\pi)$$

また，(6.15)，(6.20) と (6.26) からつぎの定理が得られる．

定理 6.3　ベッセル関数とノイマン関数はそれぞれつぎの漸近展開をもつ．

$$J_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+2p+\frac{1}{2}\right)(-1)^p}{(2p)!\,\Gamma\left(\nu-2p+\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2p}$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+2p+\frac{3}{2}\right)(-1)^p}{(2p+1)!\,\Gamma\left(\nu-2p-\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2p-1}$$
$$(-\pi<\arg z<\pi) \quad (6.27)$$

$$Y_\nu(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+2p+\frac{1}{2}\right)(-1)^p}{(2p)!\,\Gamma\left(\nu-2p+\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2p}$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+2p+\frac{3}{2}\right)(-1)^p}{(2p+1)!\,\Gamma\left(\nu-2p-\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2p-1}$$
$$(-\pi<\arg z<\pi) \quad (6.28)$$

ベッセルの微分方程式は $z=0$ において特性根 $\pm\nu$ をもつ確定特異点である．したがって，$H_\nu{}^1(z)$，$H_\nu{}^2(z)$ などは一般に多価関数であり，偏角が 2π だけ増減しても元にもどらない．たとえば，$J_\nu(z)$ の $\pi<\arg z<3\pi$ で成り立つ漸近展開を求めるためには，つぎのようにすればよい．積分表示からも明らかなように，$z^{-\nu}J_\nu(z)$ は整関数である．いま $\pi<\arg z<3\pi$ ならば，$-\pi<\arg(ze^{-2\pi i})<\pi$ であるから

$$J_\nu(z)=e^{2\pi i\nu}J_\nu(ze^{-2\pi i})$$

の右辺に (6.27) が適用できて

$$J_\nu(z) \simeq -e^{2\nu\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+2p+\frac{1}{2}\right)(-1)^p}{(2p)!\,\Gamma\left(\nu-2p+\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2p}$$
$$+e^{2\nu\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+2p+\frac{3}{2}\right)(-1)^p}{(2p+1)!\,\Gamma\left(\nu-2p-\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2p-1}$$
$$(\pi<\arg z<3\pi) \quad (6.29)$$

を得る．ν が整数のとき $J_\nu(z)$ は整関数であるが，$z=\infty$ における漸近展開は $\arg z=\pi$ を境に不連続的に変化する（ストークス現象）．

(6.27) と (6.29) で得られた漸近展開の成り立つ範囲には $\arg z=\pi$ が含まれていない．このような場合には，つぎの定理で $m=1$ の式と (6.15) を用いればよい．

定理 6.4 m を整数とすると

$$H_\nu{}^1(ze^{m\pi i})=\frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu{}^1(z)-e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu{}^2(z)$$
$$H_\nu{}^2(ze^{m\pi i})=e^{\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu{}^1(z)+\frac{\sin(1+m)\pi}{\sin\nu\pi}H_\nu{}^2(z) \tag{6.30}$$

が成り立つ．

この定理の証明は 6.3 節で与える．定理 6.4 は微分方程式の不確定特異点のまわりでの異なる角領域における解の漸近展開の間の関係式を与えるものである．このような問題を**角領域接続問題**（leteral connection problem）という．

さて，(6.30) の $m=1$ の場合を適用すると

$$H_\nu{}^1(ze^{\pi i})=-e^{-\nu\pi i}H_\nu{}^2(z)$$
$$H_\nu{}^2(ze^{\pi i})=e^{\nu\pi i}H_\nu{}^1(z)+2\cos\nu\pi H_\nu{}^2(z)$$

$-\pi<\arg z<2\pi$ のとき $0<\arg(ze^{\pi i})<3\pi$，また $-2\pi<\arg z<\pi$ のとき $-\pi<\arg(ze^{\pi i})<2\pi$ であるから，$0<\arg ze^{\pi i}<2\pi$ における $H_\nu{}^1(z)$ と $H_\nu{}^2(z)$ の漸近展開の第 1 項は (6.26) から

$$H_\nu{}^1(ze^{\pi i})\simeq -e^{-\nu\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$H_\nu{}^2(ze^{\pi i})\simeq e^{\nu\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+2\cos\nu\pi\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

したがって，(6.15) から

$$J_\nu(ze^{\pi i})\simeq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\nu\pi i}\{e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\nu\pi i}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\quad(-\pi<\arg z<\pi)$$

となる．ここで，$ze^{\pi i}$ を z でおきかえると

$$J_\nu(z)\simeq\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\nu\pi i}\cos\left(z+\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\quad(0<\arg z<2\pi)$$

が得られる.

6.3 ハンケル関数の角領域接続問題

A. 定理6.4を示すために, $J_\nu(z)$ のベッセル型積分表示

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty e^{i\alpha}}^{(0+)} t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt, \quad \theta=\arg z \tag{6.31}$$

を考える. ここで, 積分路は $\arg t=\alpha=-\pi-\theta$ なる無限遠点から原点を正の向きにまわってもとにもどる曲線をとるものとする (図6.9).

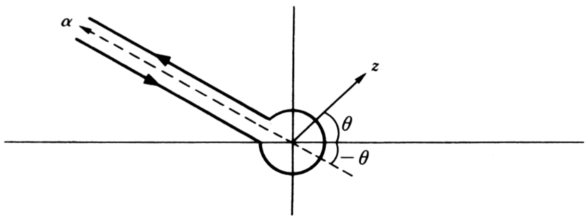


図 6.9

(6.31) の右辺を I とおき, I が $J_\nu(z)$ になることはつぎのようにしてわかる. $t=2s/z$ とおけば

$$I=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)} s^{-\nu-1}e^{s-\frac{z^2}{4s}}ds$$

が得られ, $\exp\left(-\dfrac{z^2}{4s}\right)$ を $s=0$ のまわりでローラン展開し, 項別積分を行えば

$$I=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)} e^s\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}s^{-\nu-p-1}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p ds$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^s s^{-\nu-p-1}ds$$

$s\to -s$ とすると

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p(-1)^{-\nu-p}\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-s}s^{-\nu-p-1}ds$$

ここで, (7.9) を用いると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-s}s^{-\nu-p-1}ds=\frac{\Gamma(-\nu-p)e^{\pi i(-\nu-p)}\sin\pi(-\nu-p)}{\pi}$$

が得られ, さらに (7.6) から

$$= \frac{\pi}{\pi\Gamma(1+\nu+p)\sin\pi(-\nu-p)} \cdot \frac{e^{\pi i(-\nu-p)}}{\pi} \sin\pi(-\nu-p)$$

となる．したがって，結局定理 6.1 から

$$I = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,\Gamma(\nu+p+1)} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^{p} = J_\nu(z)$$

が示された．

B. 積分 (6.31) の積分路の無限遠点の方向は $\mathrm{Re}(zt) \to -\infty$ をみたせばよいから，$|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考えると，負の実軸の方向でもかまわない．そこで，積分路を図 6.10 のように正の実軸に沿って原点に近づく 2 本の積分路に分割すると

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}} + \frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-\pi i}}^{0_+}\right\} t^{-\nu-1} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} dt \qquad (6.32)$$

となる．ここで，0_+ は積分路が $t=0$ に正の方向から入る（出る）ことを表す．また，$\infty e^{\pi i}$ は $\arg t = \pi$ 方向の無限遠点を表す．

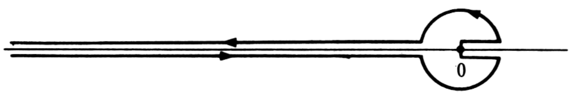


図 6.10

積分路に沿って $t \to 0$ のとき，$\mathrm{Re}\left(-\dfrac{z}{t}\right) \to -\infty$ となることから，(6.32) の右辺のそれぞれの積分は存在し，ベッセルの微分方程式 (6.1) の解であることがつぎのようにして示される．第 1 項についてのみ確かめればよい．

$$\varphi_\nu(z) = \int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}} t^{-\nu-1} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} dt$$

において，前と同じように $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}$ と仮定して

$$t = \frac{2s}{z}$$

と変換すると

$$\varphi_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}} s^{-\nu-1} e^{s-\frac{z^2}{4s}} ds$$

となる．積分記号下で微分できるから

$$\frac{d^2\varphi_\nu(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\varphi_\nu(z)}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\varphi_\nu(z)$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}}s^{-\nu-1}\left\{1-\frac{\nu+1}{s}+\frac{z^2}{4s^2}\right\}e^{s-\frac{z^2}{4s}}ds$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}}\frac{d}{ds}\left\{s^{-\nu-1}e^{s-\frac{z^2}{4s}}\right\}ds$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left[s^{-\nu-1}e^{s-\frac{z^2}{4s}}\right]_{0_+}^{\infty e^{\pi i}}=0$$

となるからである．

さて，(6.32) で $\nu\to-\nu$，積分の第1項では $t\to e^{\pi i}/s$，同じく第2項では $e^{-\pi i}/s$ とおきかえると

$$J_{-\nu}(z)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}}+\frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-\pi i}}^{0_+}\right\}t^{\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{-e^{\nu\pi i}}{\pi i}\int_{\infty e^{\pi i}}^{0_+}+\frac{-e^{-\nu\pi i}}{\pi i}\int_{0_+}^{\infty e^{-\pi i}}\right\}s^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}ds$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi i}\int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}}+\frac{e^{-\nu\pi i}}{\pi i}\int_{\infty e^{-\pi i}}^{0_+}\right\}s^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}ds \qquad (6.33)$$

(6.32)，(6.33) の関係式と (6.15)，(6.16) の関係式を比較することにより

$$\left.\begin{aligned}H_\nu{}^1(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_{0_+}^{\infty e^{\pi i}}t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt\\ H_\nu{}^2(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-\pi i}}^{0_+}t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt\end{aligned}\right\}\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2} \qquad (6.34)$$

であることがわかる．$\arg z=\theta$ が一般の場合には，(6.34) の積分の上端と下端を $\theta=0$ から連続的に変えて，zt，$-z/t$ の実部がそれぞれ $|t|\to\infty, 0$ で負となるようにとればよい．したがって

$$\begin{aligned}H_\nu{}^1(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_{0e^{i\theta}}^{\infty e^{(\pi-\theta)i}}t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt\\ H_\nu{}^2(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-(\pi+\theta)i}}^{0e^{i\theta}}t^{-\nu-1}e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}dt\end{aligned} \qquad (6.35)$$

ととれば十分である．

ここで，$t=e^{-i\tau}(\tau=i\log t)$ とおく．積分路の対応は $\tau=i(\log|t|+i\arg t)$ であるから，たとえば $t\to 0e^{i\theta}$，$\infty e^{(\pi-\theta)i}$ のとき，τ はそれぞれ $\tau\to-\theta-i\infty$，$\theta-\pi+i\infty$ となる（図6.11）．したがって，つぎが得られる．

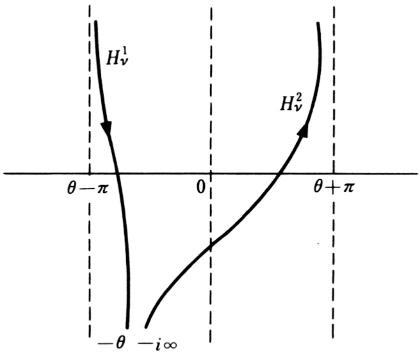


図 6.11 $H_\nu{}^1, H_\nu{}^2$ の積分路

$$H_\nu{}^1(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta-\pi+\infty i}^{-\theta-\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau \tag{6.36}$$

$$H_\nu{}^2(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta-\infty i}^{\theta+\pi+\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau \tag{6.37}$$

さて，(6.36) において z の代わりに $ze^{i\pi}$ とおけば，θ を $\theta+\pi$ でおきかえて

$$H_\nu{}^1(ze^{i\pi})=\frac{1}{\pi}\int_{\theta+\infty i}^{-\theta-\pi-\infty i} e^{iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

を得る．さらに，$\tau\to\tau-\pi$ とおいて (6.37) と比較すると

$$H_\nu{}^1(ze^{\pi i})=\frac{1}{\pi}e^{-\nu\pi i}\int_{\theta+\pi+\infty i}^{-\theta-\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau=-e^{-\nu\pi i}H_\nu{}^2(z) \tag{6.38}$$

また，(6.37) で $z\to ze^{i\pi}$ とおき，さらに $\tau\to\tau+\pi$ を続けて行えば

$$H_\nu{}^2(ze^{\pi i})=\frac{1}{\pi}\int_{-\theta-\pi-\infty i}^{\theta+2\pi+\infty i} e^{iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{\nu\pi i}\int_{-\theta-2\pi-\infty i}^{\theta+\pi+\infty i} e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

積分路を 3 つに分割して

$$=\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi}\left[\int_{-\theta-2\pi-\infty i}^{\theta-\pi+\infty i}+\int_{\theta-\pi+\infty i}^{-\theta-\infty i}+\int_{-\theta-\infty i}^{\theta+\pi+\infty i}\right]e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

第 1 項では $\tau\to\tau-2\pi$ とおいて，第 3 項とまとめると

$$=\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi}\left[(e^{-2\nu\pi i}+1)\int_{-\theta-\infty i}^{\theta+\pi+\infty i}+\int_{\theta-\pi-\infty i}^{-\theta-\infty i}\right]e^{-iz\sin\tau+i\nu\tau}d\tau$$

$$=e^{\nu\pi i}H_\nu{}^1(z)+2\cos\nu\pi H_\nu{}^2(z) \tag{6.39}$$

が得られる．(6.38) と (6.39) が定理6.4の $m=1$ の場合の公式である．m が正の整数のときの公式 (6.30) は (6.38) と (6.39) は何回もくり返し適用することによって証明される．$m=-1$ の場合は (6.38) で z の代わりに $ze^{-\pi i}$ とおけば

$$H_\nu{}^2(ze^{-\pi i})=-e^{\nu\pi i}H_\nu{}^1(z) \tag{6.40}$$

また，(6.39) と (6.40) から

$$\begin{aligned}e^{\nu\pi i}H_\nu{}^1(ze^{-\pi i})&=H_\nu{}^2(z)-2\cos\nu\pi H_\nu{}^2(ze^{-\pi i})\\&=H_\nu{}^2(z)+2\cos\nu\pi\cdot e^{\nu\pi i}H_\nu{}^1(z)\end{aligned}$$

したがって

$$H_\nu{}^1(ze^{-\pi i})=2\cos\nu\pi H_\nu{}^1(z)+e^{-\nu\pi i}H_\nu{}^2(z) \tag{6.41}$$

が得られ，(6.30) の $m=-1$ の場合の公式を与えている．(6.40) と (6.41) をくり返し適用すると，(6.30) の m が負の整数の場合の公式が得られる．

6.4　例題　$J_\nu(z)$ の漸化式

A. $J_\nu(z)$ の級数表示 (6.8) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\}&=\frac{d}{dz}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2\nu+2p}}{2^{\nu+2p}p!\,\Gamma(\nu+p+1)}\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2\nu+2p-1}}{2^{\nu+2p-1}p!\,\Gamma(\nu+p)}=z^\nu J_{\nu-1}(z)\end{aligned} \tag{6.42}$$

を得る．また

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}&=\frac{d}{dz}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2p}}{2^{\nu+2p}p!\,\Gamma(\nu+p+1)}\\&=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2p-1}}{2^{\nu+2p-1}(p-1)!\,\Gamma(\nu+p+1)}\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1} z^{2p+1}}{2^{\nu+2p+1}p!\,\Gamma(\nu+p+2)}=-z^{-\nu}J_{\nu+1}(z)\end{aligned} \tag{6.43}$$

(6.42)，(6.43) は

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\{z^\nu J_\nu(z)\}&=z^{\nu-1}J_{\nu-1}(z)\\\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}&=-z^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(z)\end{aligned}\right. \tag{6.44}$$

とかき直すことができる．そこで $\left(\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}\right)$ を続けて行うと

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{z^\nu J_\nu(z)\}=z^{\nu-k}J_{\nu-k}(z)$$
$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{z^{-\nu}J_\nu(z)\}=(-1)^k z^{-(\nu+k)}J_{\nu+k}(z) \tag{6.45}$$

が得られる．$\nu=0$ とすると，k が正整数のとき，(6.45) から

$$J_k(z)=(-1)^k z^k\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{J_0(z)\}$$
$$J_{-k}(z)=z^k\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\{J_0(z)\} \tag{6.46}$$

が成り立つ．ただし，$J_0(z)$ は (6.9) から

$$J_0(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(p!)^2}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p \tag{6.47}$$

また，$\nu=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}\left(-\frac{z^2}{4}\right)^p$$
$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{z}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \tag{6.48}$$

が得られる．(6.44) の上の式から

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \tag{6.49}$$

(6.48)，(6.49) と漸化式 (6.45) から，任意の正整数 k に対して

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^k\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\left(\frac{\sin z}{z}\right)$$
$$J_{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k\left(\frac{\cos z}{z}\right) \tag{6.50}$$

が成り立つ．

第7章　ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(z+1)$ は自然数 n に関する $n!$ を任意の複素数 z にまで一般化したものと考えられ，いろいろな関数の解析的表現にはなくてはならない特殊関数である．本書においては第 3 章の超幾何関数，第 4 章の合流型超幾何関数，および第 6 章のベッセル関数の研究の中でガンマ関数の公式をしばしば用いてきた．そこで本章では，ガンマ関数の基本的な性質と公式をまとめて述べる．また，超幾何関数の接続公式の証明などの中で $\Gamma(z)$ のスターリングの漸近公式が用いられているが，これは積分で定義されたガンマ関数にいわゆる鞍部点法を適用することにより，その漸近展開が導かれたものである．

7.1　ガンマ関数の定義

A. 準備のためつぎの 2 つの補題を証明する．

補題 7.1　2 つの変数 z, w の関数 $f(z,w)$ は，z が領域 D，w が区分的になめらかな曲線 C 上を動くとき連続，かつ w を C 上の点としたとき $f(z,w)$ は z の関数として D で正則であるとする．このとき

$$F(z)=\int_C f(z,w)dw$$

は D において正則であって，かつ

$$\frac{dF(z)}{dz}=\int_C \frac{\partial f(z,w)}{\partial z}dw$$

が成り立つ．

補題 7.2　C は無限遠点にのびる曲線であって，その任意の有界な部分は区分的になめらかであるとする．さらに，C の有限な部分に対しては補題 7.1 の仮定はみたされ，かつ無限積分

$$F(z)=\int_C f(z,w)dw$$

は，D に含まれる任意有界閉領域において，一様収束（広義一様収束）するものとする．このとき，$F(z)$ は補題 7.1 と同じ結果をみたす．

補題 7.1 の証明 K を D 内のジョルダン曲線で，K の内部は D の点ばかりからなるとする．また，K は正の向きにとるものとすると，コーシー積分公式（1.60）から K 内の z に対し

$$f(z, w)=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta, w)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

とかくことができる．これを $F(z)$ の式に代入して

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C dw\int_K \frac{f(\zeta, w)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

積分順序は変換できるから

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{d\zeta}{\zeta-z}\int_C f(\zeta, w)\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

すなわち，$F(z)$ はコーシーの積分公式をみたし，したがって K の内部で正則である．さらに，コーシーの微積分公式（1.61）を用いて

$$\frac{dF(z)}{dz}=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}\int_C f(\zeta, w)\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C dw\int_K \frac{f(\zeta, w)}{(\zeta-z)^2}\,dz=\int_C \frac{\partial f(z, w)}{\partial z}\,dw$$

補題 7.2 の証明 閉円板 $|w|\leqq n$ に含まれる C の部分を C_n とし

$$F_n(z)=\int_{C_n} f(z, w)\,dw \quad (n=1, 2, \cdots)$$

とおけば，補題 7.1 から $F_n(z)$ は D で正則．また，仮定から $F_n(z)$ は D において広義一様収束するから，定理 1.18 により，極限関数 $F(z)$ は D において正則で，さらに

$$F'(z)=\lim_{n\to\infty} F_n'(z)=\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\partial f(z, w)}{\partial z}\,dw=\int_C \frac{\partial f(z, w)}{\partial z}\,dw$$

が成り立つ．（証明終）

B. ガンマ関数 $\Gamma(z)$（Gamma funtion）をつぎの式で定義する．

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-w}w^{z-1}\,dw \tag{7.1}$$

ここで，z が整数でないときは

$$w^{z-1}=e^{(z-1)\log w}=e^{(z-1)\{\log|w|+i\arg w\}}$$

であり，w の多価関数である．そこで，正の実軸上で $\arg w=0$ とすることによってその値を確定する．$a>0, a\leqq \mathrm{Re}\,z\leqq b$ とすると，積分路の上で

$$|e^{-w}w^{z-1}|\leqq e^{-w}w^{\mathrm{Re}\,z-1}$$

であるから，積分（7.1）は任意の正数 a および $b(a<b)$ に対し，$a\leqq \mathrm{Re}\,z\leqq b$ において一様収束する．すなわち，（7.1）は $\mathrm{Re}\,z>0$ において広義一様収束することがわかる．被積分関数 $e^{-w}w^{z-1}$ は各 $w\geqq 0$ に対し z の正則関数であるから，補題7.2から $\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}\,z>0$ において正則である．

（7.1）を部分積分して

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-w}\frac{d}{dw}(w^z)dw=\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-w}w^z dw=\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$$

$$\therefore\quad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad(\mathrm{Re}\,z>0) \tag{7.2}$$

$\Gamma(1)=1$ であるから，n を正の整数とすると $\Gamma(n+1)=n!$ を得る．

（7.1）によって $\Gamma(z)$ は z-平面の右半平面で定義されているが，（7.2）を逐次適用すると $\Gamma(z)$ の定義域を左半平面に解析接続することができる．たとえば，$\Gamma(z)$ の $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}$ における値は $\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1)$ を用いて，$\Gamma(z)$ の $\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{3}{2}$ における値から導かれ，$0<\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}$ での値は（7.1）から計算される値と一致する．（7.2）をくり返し用いれば，$-(n+1)<\mathrm{Re}\,z<-n$ に対する $\Gamma(z)$ の値は

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \tag{7.3}$$

によって得られる．$\Gamma(z+n+1)$ は $\mathrm{Re}\,z>-n-1$ において存在する．したがって，$\Gamma(z)$ は高々1位の極 $z=0,-1,-2,\cdots$ を除いて，全 z 平面において正則な関数として拡張される．$z=0,-1,-2,\cdots$ が $\Gamma(z)$ の1位の極であることは，後で示すことにしよう．

（7.1）において，$w=\xi^2$ と変換すると

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^{2z-1}d\xi$$

そこで

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty e^{-(\xi^2+\eta^2)}\xi^{2p-1}\eta^{2q-1}d\xi d\eta\quad(\mathrm{Re}\,p>0, \mathrm{Re}\,q>0)$$

とおき，$\xi=r\cos\theta$，$\eta=r\sin\theta$ と極座標変換すれば

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$$
$$=\Gamma(p+q)B(p,q) \tag{7.4}$$

ただし，$B(p,q)$ は**ベータ関数**とよばれ，つぎの式で表される．

$$\begin{aligned}B(p,q)&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta\\&=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad (t=\sin^2\theta)\\&=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx \quad \left(x=\frac{1-t}{t}\right)\end{aligned} \tag{7.5}$$

$p+q=1$ とすると，$\Gamma(1)=1$ であるから

$$\Gamma(1-q)\Gamma(q)=B(1-q,q)=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x}dx \quad (0<\mathrm{Re}\,q<1)$$

ここで，留数定理を用いて

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x}dx$$

を求めよう．複素平面上に図 7.1 に示されるような区分的になめらかなジョルダン曲線 Λ を描く．まず，原点を中心，半径 ε $(0<\varepsilon<1)$ および $R(R>1)$ の円をそれぞれ Λ_ε および Λ_R とする．Λ は正の実軸と Λ_ε との交点 A から正の実軸と Λ_R との交点 B までいき，B から Λ_R に沿って再び正の実軸と交わる点 $C(=B)$

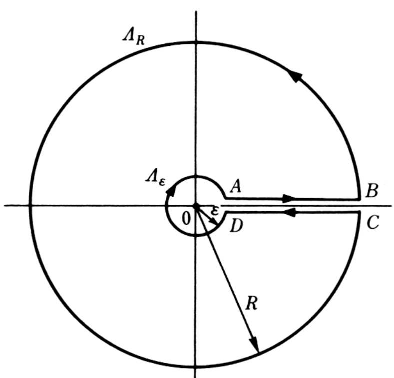


図 7.1

まで，C から正の実軸に沿って Λ_ε と交わる点 $D(=A)$ まで，D から Λ_ε に沿って A にもどるものとする．z^{q-1} は q が整数でないとき多価関数であるので，AB 上と CD 上で値が異なることを注意する必要がある．さて，この Λ に対し，積分

$$\int_\Lambda \frac{z^{q-1}}{1+z}dz \quad (0<\mathrm{Re}\,q<1)$$

を考える．被積分関数は Λ の内部の点 $z=-1=e^{\pi i}$ で1位の極をもつから，留数定理（定理1.18）を適用して

$$\int_A^B \frac{z^{q-1}}{1+z}dz+\int_C^D \frac{z^{q-1}}{1+z}dz+\int_{\Lambda_R} \frac{z^{q-1}}{1+z}dz+\int_{\Lambda_\varepsilon} \frac{z^{q-1}}{1+z}dz=2\pi i(e^{\pi i})^{q-1}$$

ここで，$\varepsilon\to 0$，$R\to\infty$ とすると

$$\int_A^B \frac{z^{q-1}}{1+z}dz=\int_\varepsilon^R \frac{x^{q-1}}{1+x}dx, \qquad \int_C^D \frac{z^{q-1}}{1+z}dz=\int_R^\varepsilon \frac{(xe^{2\pi i})^{q-1}}{1+x}dx$$

$$\left|\int_{\Lambda_R} \frac{z^{q-1}}{1+z}dz\right|\leqq KR^{\mathrm{Re}(q-1)}\to 0 \quad (R\to\infty)$$

$$\left|\int_{\Lambda_\varepsilon} \frac{z^{q-1}}{1+z}dz\right|\leqq K'\frac{\varepsilon^{\mathrm{Re}\,q}}{1-\varepsilon}\to 0 \quad (\varepsilon\to 0)$$

が成り立つ．ただし，K と K' は適当な正の定数である．したがって

$$(1-e^{2\pi qi})I=2\pi ie^{\pi(q-1)i}$$

が得られ，かき直すと

$$I=\frac{2\pi ie^{\pi qi}}{e^{2\pi qi}-1}=\frac{\pi}{\sin\pi q} \quad (0<\mathrm{Re}\,q<1)$$

$$\therefore \quad \Gamma(q)\Gamma(1-q)\sin\pi q=\pi \quad (0<\mathrm{Re}\,q<1)$$

ところが，$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z$ は z が整数のとき除去可能な特異点であるから，全平面で正則である．$0<\mathrm{Re}\,z<1$ のとき定数 π に等しいから，一致の定理（定理1.20）を用いて，全平面において

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z=\pi$$

が成り立つ．したがって，つぎの公式が示された．

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{7.6}$$

(7.6) から，$\Gamma(z)$ は0をとらないことがわかる．それは，もし z_0 で $\Gamma(z_0)=0$ とすると，$\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ より，$z_0\neq 0, \pm1, \pm2, \cdots$．したがって，$\sin\pi z_0\neq 0$，$\Gamma(z_0)=\dfrac{\pi}{\Gamma(1-z_0)\sin\pi z_0}$ より，$\Gamma(1-z_0)=\infty$．このようなことが起こりえるのは $1-z_0=-n(n=0, -1, -2, \cdots)$，すなわち $z_0=n+1$ であるが，

$\Gamma(n+1)=n!\neq 0$ であるから矛盾する．

(7.3) において $\Gamma(z+n+1)$ は 0 とならないことから，$z=0,\ -1,\ -2,\cdots,\ -n$ は $\Gamma(z)$ の 1 位の極であることがわかる．そして，(7.6) から $\Gamma(z)$ の $z=-n$ における留数がつぎのように計算できる．

$$R(-n)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\lim_{z\to -n}\frac{\pi}{\Gamma(1-z)}\frac{z+n}{\sin\pi z}=\frac{(-1)^n}{n!}$$

$\Gamma(z)$ は零点をもたないから，$1/\Gamma(z)$ は整関数であり，$z=0,\ -1,\ -2,\cdots$ は 1 位の零点である．また，(7.6) において $z=\dfrac{1}{2}$ とおけば

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

が得られる．z のかわりに $z+\dfrac{1}{2}$ とおけば

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z} \tag{7.7}$$

が成り立つ．

ここで，ガンマ関数の倍角公式を導いておこう．(7.5) において $p=q=z$ とおき，$t(1-t)=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}-t\right)^2$ が $t=\dfrac{1}{2}$ に関して対称であることから

$$B(z,z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}\{t(1-t)\}^{z-1}dt$$

変数変換 $4t(1-t)=u$ とおけば，$du=4(1-2t)dt=4\sqrt{1-u}\,dt$ であるから

$$B(z,z)=\frac{1}{2}\frac{1}{4^{z-1}}\int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=2^{1-2z}B\left(z,\frac{1}{2}\right)$$

が得られる．したがって，(7.4) から

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}=2^{1-2z}\frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

すなわち

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) \tag{7.8}$$

これを，ガンマ関数の倍角公式とよぶ．

つぎに，$\Gamma(z)$ の別の積分表示を与えよう．

$$f(z)=\int_C e^{-w}w^{z-1}dw$$

$$w^{z-1}=e^{(z-1)\{\log|w|+i\arg w\}}\quad(0\leqq\arg w\leqq 2\pi)$$

ここで，積分路 C は $\arg w=0$ の無限遠からきて原点のまわりを半径 ε の円周に沿って正の向きにまわり，$\arg w=2\pi$ の方向の無限遠に戻るものとする．積分は広義一様収束し，$f(z)$ は整関数である．この $f(z)$ と $\Gamma(z)$ の関係を調べてみる．積分路の小円の上では $f(z)=O(\varepsilon^{\mathrm{Re}\,z})$，実軸上では，上側（$\arg w=0$）と下側（$\arg w=2\pi$）では各々 $-\Gamma(z)$，$e^{2\pi iz}\Gamma(z)$ であるから

$$f(z)=(e^{2\pi iz}-1)\Gamma(z)+O(\varepsilon^{\mathrm{Re}\,z})$$

ここで，$\mathrm{Re}\,z>0$ の場合を考え，$\varepsilon\to 0$ とすると

$$f(z)=(e^{2\pi iz}-1)\Gamma(z)=2ie^{\pi iz}\sin\pi z\Gamma(z)\quad(\mathrm{Re}\,z>0)$$

を得る．したがって，再び一致の定理から z–平面全体で

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\pi iz}}{2i\sin\pi z}\int_C e^{-w}w^{z-1}dw \tag{7.9}$$

が成り立つ．

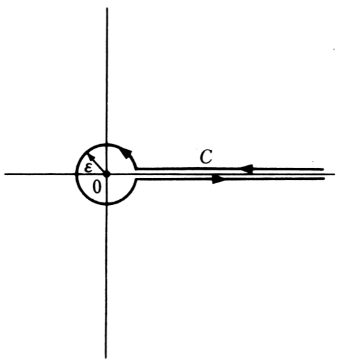


図 7.2　$\Gamma(z)$ の積分路

以上をまとめておく．

定理 7.1　ガンマ関数

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-w}w^{z-1}dw \tag{7.1}$$

は $\mathrm{Re}\,z>0$ において一価正則である．関係式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{7.2}$$

により，$z=0, -1, -2, \cdots$ を除き，全平面で一価正則な関数として解析接続される．$z=0, -1, -2, \cdots$ は 1 位の極で，$z=-n$ における留数は $(-1)^n/n!$ である．ガンマ関数はつぎの公式をみたす．

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{7.6}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos \pi z} \tag{7.7}$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) \quad (\Gamma\text{関数の倍角公式}) \tag{7.8}$$

またガンマ関数はつぎの積分表示をもつ：

$$\Gamma(z)=\frac{e^{-\pi i z}}{2i\sin \pi z}\int_C e^{-w}w^{z-1}dw \tag{7.9}$$

ここで，積分路 C は図 7.2 に示された曲線である．

7.2 鞍部点法とガンマ関数の漸近展開

δ を任意の小さい正数，R を十分大きい任意の正数とする．このとき，$|z|\geqq R$, $|\arg z|\leqq\pi-\delta$ をみたす任意の z に対して

$$\left|\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}}-1\right|\leqq K|z|^{-1}$$

となる正数 K が存在する．このことを

$$\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z} \quad (z\to\infty,\ |\arg z|<\pi) \tag{7.10}$$

とかき，$\Gamma(z)$ の $z\to\infty$ のときの漸近展開を表し**スターリング**（J. Stirling (1692－1770)）**の公式**とよばれる．証明には**鞍部点法**（saddle point method）が用いられる．鞍部点法は物理学などいくつかの分野で応用されているので，その基本的な考え方を説明し，ガンマ関数に適用してみよう．

A. 最急降下の道

$h(t)$, $g(t)$ を複素 t-平面の単連結領域 $\mathscr{G}$ で定義された正則関数とし，つぎの積分で定義される関数 $f(z)$ の $z\to\infty$ のときの振舞いを調べる．

$$f(z)=\int_{t_1}^{t_2}e^{zh(t)}g(t)dt \tag{7.11}$$

t_1 と t_2 は $\mathscr{T}$ の内部の点かまたは境界上の点，積分路（それを C とかく）は t_1 と t_2 を $\mathscr{T}$ 内で結ぶ曲線とする．当然，積分が存在する場合を考える．この方法はもっと一般な積分，たとえば $h(z)$ が t と z の関数である場合や，$h(z)$，$g(z)$ が特異点を含む場合にも拡張される．また，z が方向 α の無限遠点 $\infty e^{i\alpha}$ にいく場合には $z=|z|e^{i\alpha}$ とおいて，$e^{i\alpha}$ を $h(t)$ の中にくみこんでおいて，$|z|\to\infty$ のときの漸近展開を求めればよい．さて

$$t=\sigma+i\tau, \quad h(t)=u(t)+iv(t)=u(\sigma,\tau)+iv(\sigma,\tau)$$

とおく．$t_0=\sigma_0+i\tau_0$ を

$$h'(t_0)=0$$

をみたす点とし，t_0 の近傍で $u(\sigma,\tau)$ と $v(\sigma,\tau)$ の様子を調べよう．簡単のために

$$h''(t_0)\neq 0 \quad （位数 1 の鞍部点）$$

とする．$h'(t_0)=u_\sigma(\sigma_0,\tau_0)+iv_\sigma(\sigma_0,\tau_0)=v_\tau(\sigma_0,\tau_0)-iu_\tau(\sigma_0,\tau_0)=0$ であるから

$$u_\sigma(\sigma_0,\tau_0)=u_\tau(\sigma_0,\tau_0)=0$$

をみたす．ここで，関数論の最大値の原理（定理 1.21）を $|\exp h(t)|=\exp\{u(\sigma,\tau)\}$ に適用すれば，$u(\sigma,\tau)$ は $\mathscr{T}$ の内点において極大値，または極小値をとることはないから，$t_0=\sigma_0+i\tau_0$ は $u(\delta,\tau)$ の**鞍部点**（saddle point）でなければならない（$v(\sigma,\tau)$ についても同様である）．

t_0 の近傍において

$$h(t)=h(t_0)+\frac{1}{2}h''(t_0)(t-t_0)^2+O((t-t_0)^3)$$

とかくことができる．

$$h''(t_0)=ae^{i\nu} \quad (a>0), \quad t-t_0=\rho e^{i\theta} \quad (r>0)$$

とおくと

$$u(\sigma,\tau)=u(\sigma_0,\tau_0)+\frac{1}{2}a\rho^2\cos(2\theta+\alpha)+O(\rho^3)$$

$$v(\sigma,\tau)=v(\sigma_0,\tau_0)+\frac{1}{2}a\rho^2\sin(2\theta+\alpha)+O(\rho^3)$$

となる．したがって，$u(\sigma,\tau)=u(\sigma_0,\tau_0)$ をみたす曲線は t_0 において，直交する 2 本の直線

$$\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\nu\right) \text{ とその延長 } \quad \theta=\pi+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\nu\right)$$

$$\theta=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right) \text{ とその延長 } \quad \theta=\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right)$$

に接している．これらの曲線は t_0 の近傍を4つの部分に分けるが，そのうち

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\nu}{2}<\theta<\frac{3}{4}\pi-\frac{\nu}{2}$$

および

$$\frac{5}{4}\pi-\frac{\nu}{2}<\theta<\frac{7}{4}\pi-\frac{\nu}{2}$$

においては $u(\sigma,\tau)<u(\sigma_0,\tau_0)$，残りの部分では $u(\sigma,\tau)>u(\sigma_0,\tau_0)$ となる．前書は**谷領域**（valley region），後者は**山領域**（mountain region）とよばれる．また，曲線 $v(\sigma,\tau)=v(\sigma_0,\tau_0)$ は t_0 から $\sin(2\theta+\nu)=0$ を満たす方向，すなわち

$$\theta=-\frac{\nu}{2},\quad \theta=\pi-\frac{\nu}{2}$$

および

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\nu}{2},\quad \theta=\frac{3}{2}\pi-\frac{\nu}{2}$$

の方向へ出る曲線である．前者は山領域の中にあり，$u(\sigma,\tau)$ はこの曲線に沿って最も急激に増大し，また後者は谷領域の中にあり，$u(\sigma,\tau)$ は最も速く減少する．これらの曲線を**最急上昇の道**（path of the steepest ascent），および**最急降下の道**（path of the steepest descent）とよぶ（図7.3）．漸近展開を求めるには最急降下の道を利用する．

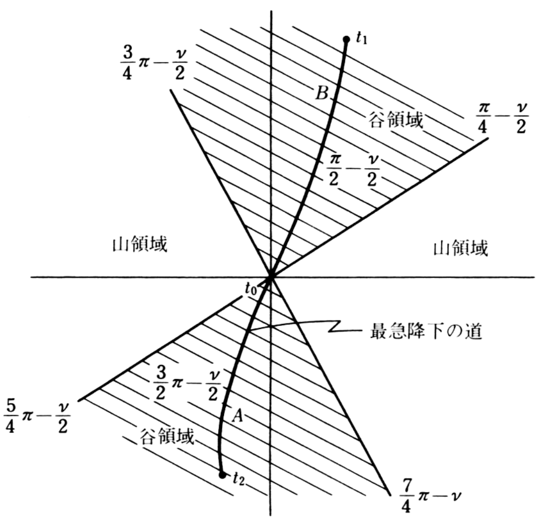


図 7.3　鞍部点法

ここで，積分（7.11）の積分路 C に関してつぎの仮定をする．

（1） C はコーシーの積分定理などを用いて積分の値を変えることなく，ただ1つの鞍部点 t_0 を通るように変形できる（いくつかの鞍部点を通るときは積分路を分割し，各々の積分路からの寄与を求め，それらを比較すればよい）．

（2） C は t_0 を通り，t_0 の谷領域の中にあり，また始点 t_1 および終点 t_2 をそれぞれ反対側の谷領域の中にもち，t_0 の近傍では最急降下の道に沿った曲線に変形できる．

さて，積分路 C は上の仮定で述べたように変形されているものとしよう．そうすると，t_0 の近傍では最急降下の道，それを C_0 とかけば，C_0 の上では

$$u(\sigma,\tau)-u(\sigma_0,\tau_0)=h(t)-h(t_0)=\frac{1}{2}(t-t_0)^2h''(t_0)+O((t-t_0)^3)<0$$

となる．また，C の残りの部分からの積分への寄与が十分小さくなるように，たとえばつぎのような仮定をする．すなわち，$t\in C-C_0$ のとき

$$u(\sigma,\tau)\leqq u(\sigma_0,\tau_0)-\delta \quad (\delta>0)$$

$$\int_{C-C_0}|g(t)||dt|\leqq K \quad (K>0)$$

あるいは

$$u(\sigma,\tau)\leqq u(\sigma_0,\tau_0)-\delta|t-t_0| \quad (\delta>0)$$

$$|g(t)|\leqq K \quad (K>0)$$

がみたされているものとする．ガンマ関数では後の仮定がみたされる．このとき，$C-C_0$ からの寄与は適当な正数 K と ε が存在して

$$Ke^{zh(t_0)}e^{-\varepsilon z}$$

でおさえられることがわかる．したがって

$$f(z)=\int_{C_0}e^{zh(t)}g(t)dt+Oe^{z(h(t_0)-\varepsilon)} \tag{7.12}$$

C_0 の上で実変数 s を

$$h(t)-h(t_0)=\frac{1}{2}(t-t_0)^2h''(t_0)+O((t-t_0)^3)=-s^2 \tag{7.13}$$

によって導入すれば，t は s の関数 $t=t(s)$ として定義され

$$\int_{C_0}e^{zh(t)}g(t)dt=e^{h(t_0)z}\int_{-s_a}^{s_b}e^{-zs^2}g(t(s))\frac{dt}{ds}ds \tag{7.14}$$

となる．s_b と s_a は正数で，変換（7.13）によって C_0 の両端の点に対応する点である．（7.13）から

$$t-t_0=\left\{\frac{-2}{w''(t_0)}\right\}^{\frac{1}{2}}s+O(s^2) \tag{7.15}$$

また

$$\begin{aligned} g(t(s)) &= g(t_0)+(t-t_0)g'(t_0)+O\{(t-t_0)^2\} \\ &= g(t_0)+g'(t_0)\left\{\frac{-2}{h''(t_0)}\right\}^{\frac{1}{2}}s+O(s^2) \end{aligned} \tag{7.16}$$

ここで，$\{-2/h''(t_0)\}^{\frac{1}{2}}$ の分枝のとり方について注意しておこう．積分路 C_0 は図 7.3 において，谷領域 A から t_0 を通り谷領域 B に向かうものとする．s は $\arg(t-t_0)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$ であるとき，正となればよいことから

$$\arg\left\{\frac{-2}{w''(t_0)}\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\nu \quad (\nu=\arg h''(t_0))$$

すなわち

$$\left\{\frac{-2}{h''(t_0)}\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,|h''(t_0)|^{-\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\nu}{2}\right)} \tag{7.17}$$

ととればよい．このとき，t が谷領域 A にあれば $s<0$ となる．

B. 鞍部点法

$f(z)$ の $z\to\infty$ のときの漸近展開を求めるために，つぎの補題を示そう．

補題 7.3

$$f(z)=\int_{-\alpha}^{\beta}e^{-zs^2}\phi(s)ds \quad (\alpha,\beta>0) \tag{7.18}$$

$$\phi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n s^n \quad (|s|<\gamma,\gamma>\alpha,\beta) \tag{7.19}$$

ならば，任意の N と十分大きい R に対し，$z\geqq R$ ならば

$$f(z)=\sum_{m=0}^{N}\left\{a_{2m}\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)z^{-(2m+1)/2}\right\}+O\left(z^{\frac{-(2N+2)}{2}}\right)+O\left(\frac{e^{-zT}}{z}\right) \quad (T>0) \tag{7.20}$$

証明 変数変換

$$s=\begin{cases} \tau^{\frac{1}{2}} & 0\leqq s\leqq\beta \\ -\tau^{\frac{1}{2}} & -\alpha\leqq s\leqq 0 \end{cases}$$

により，(7.18) は

$$f(z)=\frac{1}{2}\int_0^{\beta^2}e^{-z\tau}\phi(\tau^{\frac{1}{2}})\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2}e^{-z\tau}\phi(-\tau^{\frac{1}{2}})\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\beta^2}e^{-z\tau}\{a_0+a_1\tau^{\frac{1}{2}}+a_2\tau+\cdots\}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2}e^{-z\tau}\{a_0-a_1\tau^{\frac{1}{2}}+a_2\tau+\cdots\}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

ここで

$$\frac{1}{2}\int_0^{\gamma}e^{-z\tau}a_n\tau^{\frac{n-1}{2}}d\tau=\frac{a_n}{2}\left\{\int_0^{\infty}e^{-z\tau}\tau^{\frac{n-1}{2}}d\tau-\int_{\gamma}^{\infty}e^{-z\tau}\tau^{\frac{n-1}{2}}d\tau\right\}$$

$$=\frac{a_n}{2}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{z^{\frac{n+1}{2}}}+O\left(\frac{1}{z}e^{-z\gamma}\gamma^{\frac{n-1}{2}}\right)\right\}$$

に注意すれば，(7.20) が得られる.　(証明終)

(7.14) に補題 7.3 を適用すれば，$f(z)$ の漸近展開が得られる. (7.11), (7.13), (7.14), (7.15) および (7.16) から，$f(z)$ の $z\to\infty$ のときの漸近展開の第1項は

$$f(z)=e^{h(t_0)z}g(t_0)\left\{\frac{2\pi}{z|h''(t_0)|}\right\}^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i(\pi-\nu)}{2}}+O\left(\frac{e^{h(t_0)z}}{z}\right)$$

となる.

この結果をみればわかるように，$f(z)$ の漸近展開は $h(t)$ と $g(t)$ の鞍部点 t_0 における値によって決定されることを注意しよう.

C. $\Gamma(z)$ の漸近展開

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty}e^{-w}w^z dw \tag{7.21}$$

は，$\mathrm{Re}\,z>0$，すなわち $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2}$ において正則である. 積分路は正の実軸上にとる.

(7.21) を (7.10) の形にするため，変換

$$w=z(1+t),\quad z=|z|e^{i\alpha},\quad |\alpha|<\frac{\pi}{2}$$

を行えば

$$\Gamma(z+1)=z^{z+1}e^{-z}\int_{-1}^{\infty e^{-i\alpha}}e^{|z|\{e^{i\alpha}[\log(1+t)-t]\}}dt \tag{7.22}$$

となる. 積分路は t–平面で，$t=-1(w=0)$ から $t=\infty e^{-i\alpha}(w=\infty)$ へいく曲線と

なる（図 7.4）．（7.22）の積分の項

$$f(z)=\int_C e^{|z|h(t)}dt,\quad h(t)=e^{i\alpha}\{\log(1+t)-t\} \tag{7.23}$$

の $|z|\to+\infty$ のときの漸近展開を考える．積分路 C は -1 から $\infty e^{-i\alpha}(|\alpha|<\pi/2)$ へいく曲線である．

$h(t)$ の鞍部点は $h'(t)=0$ の根で $t=0$ のみである．また，$h''(0)=-e^{i\alpha}\neq 0$ であるから，位数 1 の鞍部点である．$t=0$ の近傍において

$$h(t)=-e^{i\alpha}\frac{1}{2}t^2+O(t^3) \tag{7.24}$$

であるから，曲線 $\mathrm{Re}\,h(t)=\mathrm{Re}\,h(0)=0$ は $t=0$ において，2 本の直線

$$\theta=\arg t=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\quad とその延長\quad \theta=\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$$

$$\theta=\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\quad とその延長\quad \theta=-\frac{1}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}$$

に接している．また，最急降下の曲線 $\mathrm{Im}\,h(t)=\mathrm{Im}\,h(0)=0$ は $t=0$ で

$$\theta=-\frac{1}{2}\alpha\quad とその延長\quad \theta=\pi-\frac{1}{2}\alpha$$

に接している．さらに，$t=-1$ と $\theta=-\alpha$ 方向の無限遠点は $t=0$ の谷領域の中に含まれるので，積分路 C は鞍部点 $t=0$ を通り，$t=0$ の近傍では最急降下の道に沿い，谷領域の中に完全に含まれる曲線 C_1 に変形することができる（図 7.4）．

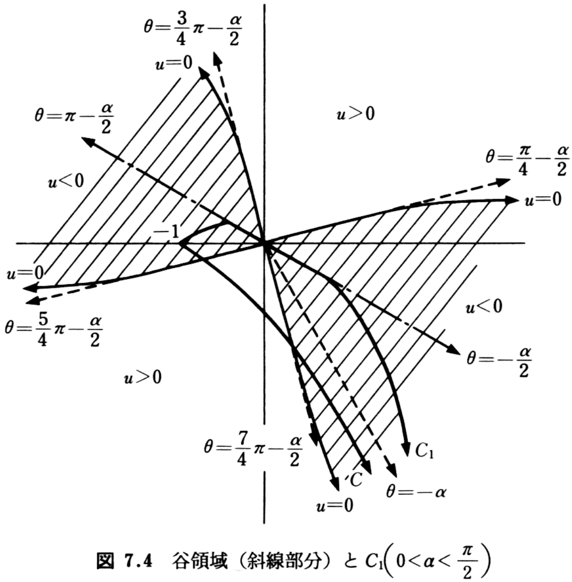


図 7.4 谷領域（斜線部分）と $C_1\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

(7.13) に従い

$$h(t)-h(t_0)=e^{i\alpha}\{\log(1+t)-t)\}=-s^2$$

によって s を導入しよう．(7.24) から s と t の関係は $\arg t=-\dfrac{\alpha}{2}$ のとき，$s>0$ となるようにとれば

$$t=\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}i\alpha}s+O(s^2) \tag{7.25}$$

となる．

したがって

$$f(z)\sim\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}i\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|z|s^2}ds$$

$$=\left(\frac{2\pi}{|z|}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}i\alpha}=\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

結局，(7.22) からつぎの定理が示された．

定理 7.2

$$\Gamma(z+1)=\sqrt{2\pi}\,z^{z+\frac{1}{2}}e^{-z}\left\{1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}\quad\left(z\to\infty,\ |\arg z|<\frac{\pi}{2}\right) \tag{7.26}$$

なお，$\mathrm{Re}\,z<0$ の場合には積分表示 (7.8) を用いて漸近展開が導かれ，$|\arg z|<\pi$ ならば (7.26) と同じ結果が得られる．また，t と s の関係 (7.25) をより精密に計算することにより

$$\Gamma(z+1)=\sqrt{2\pi}\,e^{-z}z^{z+\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\right\} \tag{7.27}$$

となることがみちびかれている．

D. スターリングの公式を用いて，ガンマ関数の無限積表示と微分を求める．

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n+1)\cdots z}=\frac{\Gamma(z+n+1)}{\Gamma(n+1)z(1+z)\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}$$

(7.26) から

$$=\frac{\sqrt{2\pi}\,(z+n)^{z+n+\frac{1}{2}}e^{-(z+n)}}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}z(1+z)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{n^{z+n+\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{n}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{z+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}z(1+z)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{n^{z}}{z(1+z)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{z}}{z(1+z)\left(1+\dfrac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{z}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} z^{-1}e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}e^{\frac{z}{m}}$$

$$= \frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}e^{\frac{z}{m}} \tag{7.28}$$

ここで，$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n\right)=0.5772\cdots$ は**オイラー**（L. Euler (1707–1783)）**の定数**である．最後の表現から

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{d}{dz}\log\Gamma(z)=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+z}\right) \tag{7.29}$$

が成り立つ．さらに

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+z)^2}$$

また，(7.29) で $z=n$（正整数）とおけば

$$\left[\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right]_{z=n}=-\gamma+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m} \tag{7.30}$$

が得られる．

参 考 文 献

本書を書くにあたり，参考にした文献を上げておく．まず，基礎としての微分積分学および一変数の複素関数論に関しては

［1］ 理工系の微分積分学，吹田信之・新保経彦共著，学術図書（1987）

［2］ 複素関数論入門，R. V. チャーチル &J. W. ブラウン共著，中野実訳，マクグロウ出版（1992）

また，複素変数の常微分方程式論ではまえがきで述べた

［3］ 常微分方程式（岩波全書），福原満州雄，岩波書店（1950）

のほか，一読を薦めたい書物として

［4］ 常微分方程式　第2版（岩波全書），福原満州雄，岩波書店（1980）

［5］ A. Course of Modern Analysis, E. T. Whittaker & G. N. Watson, Cambridge Uni. Press（1973）

などがある．新しい文献として

［6］ 常微分方程式，高野恭一，朝倉書店（1994）

が出版されている．つぎに特殊関数論については

［7］ 特殊関数，小谷正雄，橋本英典共著，岩波講座　現代応用数学 A. 8（1958）

［8］ 特殊関数，H. ホックシュタット著，岡崎誠，大槻義彦共訳，培風館（1974）

を主に参考にしたが，その他数多くの書物がある．量子力学については，著名な書物が多数ある中で，初心者にとって親切な記述でわかりやすい

［9］ 量子力学入門，野村昭一郎，コロナ社（1973）

を上げておく．なお，積分で定義された関数の鞍部点法による漸近展開の理論に関しては

［10］ Asymptotic Analysis, J. D. Murray, Springer-Verlag（1984）

を参考にした．

最後に超幾何微分方程式および合流型超幾何微分方程式の理論をさらに深く研究しようとする読者に対しては，つぎの文献を上げておく．

［11］ Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points, H. Majima, Lecture Notes Math., 1075, Springer（1984）

［12］ Fuchsian Differential Equations, M. Yoshida, Vieweg（1987）

［13］ From Gauss to Painlevé, K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and

M. Yoshida, Vieweg (1991)

[14] 私説　超幾何関数，吉田正章，共立出版 (1997)

さくいん

―ア 行―

―カ 行―

―サ 行―

—タ 行—

—ナ 行—

—ハ 行—

著者紹介

西本敏彦（にしもと としひこ）

1964年　東京工業大学大学院修士課程修了
千葉大学理学部助教授，
東京工業大学理学部助教授，同教授
を経て
1996年　東京工業大学名誉教授
現　在　高知工科大学教授・理学博士

超幾何・合流型超幾何微分方程式

1998年11月10日　初版1刷発行

著　者　西本敏彦　© 1998

発行者　南條光章

発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向 4-6-19
電話 03-3947-2511（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035

印　刷　科学図書
製　本　協栄製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 413.57
ISBN 4-320-01593-2